ВЕСТНИК ТОГУ. 2010. № 3 (18)

УДК 519.68

О СГЛАЖИВАЮЩЕМ МЕТОДЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ЗАДАННЫМ ТРЕНИЕМ

Намм Р. В. – д-р физ.-мат. наук, проф. завкафедрой «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», e-mail: namm@mail.khstu.ru; *Ткаченко А. С.* – преп. кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», e-mail: taskhv@mail.ru (ТОГУ)

Вариационные задачи минимизации недифференцируемых функционалов часто возникают в задачах механики, учитывающих трение. Конечноэлементная аппроксимация таких задач приводит к конечномерной выпуклой задаче негладкой оптимизации [1, 2]. Стандартные подходы к решению таких задач рассмотрены в [3, 4, 5]. В данной работе исследуется метод решения полукоэрцитивной задачи с заданным трением, позволяющий сглаживать вспомогательный функционал на каждом шаге итерационного процесса.

Variational problems of minimization of non-differentiable functionals often appear in mechanics problems which include friction. The finite-element approximation of these problems leads to the finite-dimension convex problem of a non-smooth optimization [1], [2]. Standard ways of solving these problems are considered in [3], [4], [5]. A solution technique of the semicoercive problem with set friction that allows one to smooth an auxiliary functional at every iterative process step is investigated.

Ключевые слова: функционал, седловая точка, итеративная регуляризация, триангуляция, конечные элементы, трение.

1. Постановка задачи. Функционалы Лагранжа

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} fv d\Omega + \int\limits_{\Gamma} g|v| d\Gamma \to \min \\ v \in W_2^1(\Omega) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\Omega \in R^2$ – ограниченная область с достаточно регулярной границей Г, $f \in L_2(\Omega)$, $g \in L^\infty(\Gamma)$ – заданные функции, $g > 0$ на Γ. Функционал в (1) не является сильно выпуклым в $W_2^1(\Omega)$ и поэтому задача разрешима не при всех f и g. Однако если выполнено условие

$$\int_{\Gamma} g d\Gamma - \left| \int_{\Omega} f d\Omega \right| > 0, \qquad (2)$$

то задача (1) имеет решение [6]. При условии, что решение u задачи принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$, оно единственно [7]. Легко видеть, что задача (1) равносильна задаче [8, 9]

$$\begin{cases} \bar{J}(v,w) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega - \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma} g|v-w| d\Gamma \to \min \\ w = 0 \ \text{на} \ \Gamma, \ (v,w) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma) \end{cases} . \qquad (3)$$

На пространстве $W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma) \times L_2(\Gamma)$ введем классический функционал Лагранжа

$$L(v,w,l) = \bar{J}(v,w) + \int_{\Gamma} l w d\Gamma .$$

<u>Определение 1.</u> Точка $(v^*, w^*; l^*) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma) \times L_2(\Gamma)$ называется седловой, если

$$L(v^*, w^*; l) \le L(v^*, w^*; l^*) \le L(v, w; l^*) \ \ \forall (v, w; l) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma) \times L_2(\Gamma).$$

Покажем, что пара $\{v^*, w^*\}$ является решением задачи (3). Действительно, из левого неравенства для седловой точки вытекает, что $w^* = 0$. Тогда из правого неравенства следует

$$\bar{J}(v^*, w^*) = \bar{J}(v^*, w^*) + \int_{\Gamma} l^* w^* d\Gamma = \min_{v,w} \left\{ \bar{J}(v,w) + \int_{\Gamma} l^* w d\Gamma \right\} \le \min_{(v,0)} \bar{J}(v,0) = \min_{v} \bar{J}(v)$$

Тем самым $\{v^*, w^*\} = \{v^*, 0\}$ является решением задачи (3). Если элемент $v^* \in W_2^2(\Omega)$, то он единственный [7]. Введем функционал

$$K(v,w;l,m) = \begin{cases} \bar{J}(v,w) + \displaystyle\int_{\Gamma} l m d\Gamma + \frac{r}{2}\int_{\Gamma} m^2 d\Gamma, \ \text{если} \ w = m \ \text{на} \ \Gamma \\ +\infty, \ \text{иначе} \end{cases}$$

Следуя [8, 10, 11], определим модифицированный функционал Лагранжа

$$M(v,w;l) = \inf_{m} K(v,w;l,m) = \bar{J}(v,w) + \int_{\Gamma} l w d\Gamma + \frac{r}{2}\int_{\Gamma} m^2 d\Gamma .$$

Имеем

$$\inf_{v,w} M(v,w;l) = \inf_{v,w}\inf_{m} K(v,w;l,m) = \inf_{m}\inf_{v,w} K(v,w;l,m) =$$
$$= \inf_{m}\inf_{v,w}\left\{ \bar{J}(v,w) + \int_{\Gamma} lmd\Gamma + \frac{r}{2}\int_{\Gamma} m^2 d\Gamma \right\} = \inf_{m}\left\{ \inf_{v} \bar{J}(v,m) + \int_{\Gamma} lmd\Gamma + \frac{r}{2}\int_{\Gamma} m^2 d\Gamma \right\}.$$

Введем функцию чувствительности [8]

$$\chi(m) = \inf_{v} \bar{J}(v,m) \tag{4}$$

Очевидно, что при условии (2), при любом фиксированном $m \in L_2(\Gamma)$ справедливо

$$\bar{J}(v,m) \to +\infty \text{ при } \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \to \infty$$

Поэтому задача (4) разрешима для $\forall m \in L_2(\Gamma)$ и $\chi(m)$ – выпуклый конечнозначный функционал [8, 10].

Введем двойственный функционал

$$\underline{M}(l) = \inf_{v,w} M(v,w;l).$$

$$\underline{M}(l) = \inf_{v,w}\left\{ \bar{J}(v,w) + \int_{\Gamma} lwd\Gamma + \frac{r}{2}\int_{\Gamma} w^2 d\Gamma \right\}, \tag{5}$$

$$\underline{M}(l) = \inf_{m}\left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma} lmd\Gamma + \frac{r}{2}\int_{\Gamma} m^2 d\Gamma \right\}. \tag{6}$$

Так как $\left\{ \chi(m) + \int_{\Gamma} lmd\Gamma + \frac{r}{2}\int_{\Gamma} m^2 d\Gamma \right\}$ – сильно выпуклый по m функционал, то задача (6) разрешима и её решение $m(l)$ единственно. Нетрудно показать, что и задача (5) при выполнении условия (2) разрешима и, кроме того, решение $\left(v(l), w(l)\right)$ задачи (5) единственно, если $u(l) \in W_2^2\left(\Omega\right)$.

Двойственный функционал $\underline{M}(l)$ дифференцируем по Гато и его производная $\nabla\underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{1}{r}$, т. е. [10, 11] $\|\nabla\underline{M}(l_1) - \nabla\underline{M}(l_2)\|_{L_2(\Gamma)} \le \frac{1}{r}\|l_1 - l_2\|_{L_2(\Gamma)}$.

Определение 2. Точка $(\bar{v},\bar{w};\bar{l}) \in W_2^1\left(\Omega\right) \times L_2(\Gamma) \times L_2(\Gamma)$ называется седловой для модифицированного функционала $M(v,w;l)$, если

$M(\bar{v},\bar{w};l) \le M(\bar{v},\bar{w};\bar{l}) \le M(v,w;\bar{l}) \;\; \forall (v,w;l) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma) \times L_2(\Gamma)$.

Определения 1 и 2 для седловых точек $L(v,w;l)$ и $M(v,w;l)$ совпадают.

Можно показать, что и сами седловые точки для классического и модифицированного функционалов Лагранжа совпадают [8, 10, 12].

2. Алгоритм решения

Рассмотрим метод решения задачи (3), основанный на итеративной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа.
Возьмем произвольную начальную точку $\left(v^0, l^0\right) \in W_2^1\left(\Omega\right) \times W_2^{1/2}\left(\Gamma\right)$ и генерируем последовательность $\left(v^k, w^k; l^k\right)$ следующим образом.

(i) На $(k+1)$-ой итерации $(k = 0,1,2,...)$ строим функционал $L_k(v,w) = M\left(v,w;l^k\right) + \dfrac{1}{2}\left\|v - v^k\right\|^2_{L_2(\Omega)}$ и находим $z^{k+1} = \left(v^{k+1}, w^{k+1}\right)$ из критерия $\left\|z^{k+1} - \overline{z}^{k+1}\right\|_{W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)} \le \delta_k$, $\left(\|z\|^2_{W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)} = \|v\|^2_{W_2^1(\Omega)} + r\|w\|^2_{L_2(\Gamma)}\right)$,

где $\overline{z}^{k+1} = \left(\overline{v}^{k+1}, \overline{w}^{k+1}\right) = \arg\min\limits_{v,w} L_k(v,w)$, $\delta_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$.

(ii) Корректируем двойственную переменную по формуле
$l^{k+1} = l^k + rw^{k+1}$.

Вместе с l^{k+1} введем элемент

$$\mu^{k+1} = l^k + r\overline{w}^{k+1}.$$

Регуляризирующая добавка $\dfrac{1}{2}\left\|v - v^k\right\|^2_{L_2(\Omega)}$ обеспечивает сильную выпуклость минимизируемого функционала $L_k(v,w)$ на $W_2^1\left(\Omega\right)\times L_2\left(\Gamma\right)$. Это означает, что вспомогательные задачи

$$L_k(v,w) \to \min\,,\ \left(v,w\right) \in W_2^1\left(\Omega\right)\times L_2\left(\Gamma\right) \qquad (7)$$

однозначно разрешимы и для их решения можно применять эффективные оптимизационные методы.

В дальнейшем символ $\left(\cdot,\cdot\right)_0$ будет обозначать скалярное произведение в $L_2\left(\Gamma\right)$. На пространстве $L_2\left(\Omega\right)\times L_2\left(\Gamma\right)\times L_2\left(\Gamma\right)$ и $W_2^1\left(\Omega\right)\times L_2\left(\Gamma\right)\times L_2\left(\Gamma\right)$ определим скалярные произведения по формулам

$$\left\langle \left(v_1, w_1; l_1\right), \left(v_2, w_2; l_2\right)\right\rangle_0 = \left(v_1, v_2\right)_0 + r\left\langle w_1, w_2\right\rangle_{L_2(\Gamma)} + \frac{1}{r}\left\langle l_1, l_2\right\rangle_{L_2(\Gamma)},$$

$$\left\langle \left(v_1, w_1; l_1\right), \left(v_2, w_2; l_2\right)\right\rangle_1 = \left(v_1, v_2\right)_{W_2^1(\Omega)} + r\left\langle w_1, w_2\right\rangle_{L_2(\Gamma)} + \frac{1}{r}\left\langle l_1, l_2\right\rangle_{L_2(\Gamma)}$$

и соответствующие нормы

$$\left\|(v,w;l)\right\|_0=\left(\|v\|^2_{L_2(\Omega)}+r\|w\|^2_{L_2(\Gamma)}+\frac{1}{r}\|l\|^2_{L_2(\Gamma)}\right)^{1/2},$$

$$\left\|(v,w;l)\right\|_1=\left(\|v\|^2_{W_2^1(\Omega)}+r\|w\|^2_{L_2(\Gamma)}+\frac{1}{r}\|l\|^2_{L_2(\Gamma)}\right)^{1/2}.$$

Обозначим $p^k=\left(z^k,l^k\right)=\left(v^k,w^k;l^k\right)$, $q^k=\left(\overline{z}^k,\mu^k\right)=\left(\overline{v}^k,\overline{w}^k;\mu^k\right)$.

Теорема 1. Пусть функционал Лагранжа $L(v,w;l)$ имеет непустое множество седловых точек. Тогда последовательность $\left\{q^k\right\}$ $(k=1,2,...)$, генерируемая алгоритмом (i), (ii), ограничена в $W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)\times L_2(\Gamma)$. Более того, $\left\{\overline{v}^k\right\}$ является компактной в $W_2^1(\Omega)$, а $\overline{w}^k$ стремятся к нулю в $L_2(\Gamma)$.

Схема доказательства подобна доказательству теоремы 1 в [11].

Теорема 2. Пусть $\overline{v}^k\in W_2^2(\Omega)$, $\mu^k\in W_2^{1/2}(\Gamma)$, $k=1,2,...$ и, кроме того,

(A) $\left\|\overline{v}^k\right\|_{W_2^2(\Omega)}\le c,$

(B) $\left\|\overline{\mu}^k\right\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)}\le c,$

где $c>0$ – const. Тогда последовательность $\left\{v^k,w^k;l^k\right\}$ сходится в $W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)\times L_2(\Gamma)$ к седловой точке $\left\{\overline{v},0,\overline{l}\right\}$ функционала $L(v,w;l)$. Более того, $\overline{v}\in W_2^2(\Omega)$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2 в [11].

Рассмотрим подробнее реализацию шага (i) алгоритма, т. е. задачу минимизации недифференцируемого функционала

$$L_k(v,w)=M\left(v,w;l^k\right)+\frac{1}{2}\left\|v-v^k\right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Имеем

$$\min_{v,w}L_k(v,w)=\min_{v,w}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla v|^2+v^2\right)d\Omega-\int_\Omega\left(f+v^k\right)vd\Omega+\int_\Gamma g|v-w|d\Gamma+\right.$$

$$\left.+\int_\Gamma l^kwd\Gamma+\frac{r}{2}\int_\Gamma w^2d\Gamma+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(v^k\right)^2d\Omega\right\}=\min_v\min_w\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla v|^2+v^2\right)d\Omega-\int_\Omega\left(f+v^k\right)vd\Omega+\right.$$

$$\left.+\int_\Gamma g|v-w|d\Gamma+\int_\Gamma l^kwd\Gamma+\frac{r}{2}\int_\Gamma w^2d\Gamma\right\}+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(v^k\right)^2d\Omega=$$

$$
= \min_v \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2 \right) d\Omega - \int_\Omega \left(f + v^k \right) v d\Omega + \min_w \left(\int_\Gamma g |v - w| d\Gamma + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \int_\Gamma l^k w d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma w^2 d\Gamma \right) \right\} + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(v^k \right)^2 d\Omega = \min_v \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2 \right) d\Omega - \right.
$$

$$
\left. - \int_\Omega \left(f + v^k \right) v d\Omega + \min_w \left(\int_\Gamma \left(g |v - w| + l^k w + \frac{r}{2} w^2 \right) d\Gamma + \right) \right\} + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(v^k \right)^2 d\Omega =
$$

$$
= \min_v \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2 \right) d\Omega - \int_\Omega \left(f + v^k \right) v d\Omega + \right.
$$

$$
\left. + \int_\Gamma \left(\min_w \left(g |v - w| + l^k w + \frac{r}{2} w^2 \right) \right) d\Gamma \right\} + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(v^k \right)^2 d\Omega.
$$

Для упрощения изложения в дальнейшем будем считать, что $g > 0$ – const на Γ. Известно [8], что функция

$$
F(v) = \min_w \left\{ |v - w| + \frac{l^k}{g} w + \frac{r}{2g} w^2 \right\}
$$

непрерывно дифференцируема, при этом $|F'(v)| \le 1 \ \forall v$.

Таким образом, вспомогательная задача минимизации на $W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ недифференцируемого функционала $L_k(v, w)$ сводится к минимизации в $W_2^1(\Omega)$ дифференцируемого функционала

$$
L_k(v) = \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2 \right) d\Omega - \int_\Omega \left(f + v^k \right) v d\Omega + g \int_\Gamma F(v) d\Gamma \right\}.
$$

Пусть $\Omega \in R^2$ – ограниченный многоугольник. Реализуем алгоритм (i), (ii) с помощью метода конечных элементов на регулярной последовательности $\{F_{h_k}\}$ триангуляций области Ω при $h_k \to 0$ (h_k – параметр триангуляции F_{h_k}) (см. [5]). Обозначим N_{h_k} – множество узлов F_{h_k}; $M_{h_k} = \Gamma \cap N_{h_k}$; V_{h_k} – линейная оболочка соответствующих кусочно-аффинных базисных функций $\varphi_i, i = 1, ..., |N_{h_k}|$, $|N_{h_k}|$ – количество узлов N_{h_k}, I_{h_k} – множество индексов узлов триангуляции, $\overline{I}_{h_k}$ – множество индексов граничных узлов. Отметим, что так как Ω – многоугольник, обеспечено включение $V_{h_k} \subset W_2^1(\Omega), k = 0, 1, 2...$

Приближенное решение u^{k+1} вспомогательной задачи (7) определяется по методу конечных элементов. Задача (7) заменяется приближенной

$$\begin{cases} L_k(v) \to \min \\ v \in V_{h_k} \end{cases} \tag{8}$$

Теорема 3. Пусть Ω – ограниченный многоугольник в R^2, выполнены предположения (А), (В). Тогда имеет место оценка $\left\|z^k - \overline{z}^k\right\|_{W_2^1(\Omega)} \le \widehat{c}\sqrt{h_k}, k = 1,2,...,\ \widehat{c} > 0 - const$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы в [13].

Полагая в алгоритме (i), (ii) $\delta_k = h_k$, делаем вывод о том, что последовательность $\left\{u^k\right\}$ будет сходиться в $W_2^1(\Omega)$ к решению u^* задачи (1), если $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{h_k} < \infty$ (см. шаг (i) алгоритма).

3. Численный пример

Распишем подробнее функционал $L_k(v)$.

$$L_k(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\, d\Omega - \int_\Omega fv d\Omega + g\int_\Gamma F(v)d\Gamma + \frac{1}{2}\left\|v - u^k\right\|^2$$

$$\frac{1}{2}\left\|v - u^k\right\|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v - u^k\right)^2 d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v^2 - 2vu^k + \left(u^k\right)^2\right)d\Omega$$

$$L_k(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2\right)d\Omega - \int_\Omega \left(f + u^k\right)v d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u^k\right)^2 d\Omega + g\int_\Gamma F(v)d\Gamma.$$

Пусть $v = \sum_{i=1}^{|N_{h_k}|} y_i\varphi_i$, $u^k = \sum_{i=1}^{|N_{h_k}|} y^k{}_i\varphi_i$. Тогда

$$L_k(y) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|\sum_{j=1}^{|N_h|} y_j\nabla\varphi_j\right|^2 + \left(\sum_{j=1}^{|N_h|} y_j\varphi_j\right)^2\right)d\Omega - \int_\Omega \left(f + \sum_{j=1}^{|N_h|} y_j^k\varphi_j\right)yd\Omega +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \left(u^k\right)^2 d\Omega + g\int_\Gamma F(y)d\Gamma.$$

Пусть M_m – граничный узел с индексом $m = 1,2,...,\left|M_{h_k}\right|$ ($\left|M_{h_k}\right|$ – количество граничных узлов). Тогда, используя квадратурную формулу трапеций и учитывая, что расстояние $\left|M_iM_{i+1}\right|$ между двумя соседними узлами на границе равно h, можно записать

$$\int_{\Gamma} F(y)d\Gamma = \sum_{m=1}^{|M_h|} \int_{M_m M_{m+1}} F(y)d\Gamma \approx \sum_{m=1}^{|M_h|} \frac{1}{2}\left|M_m M_{m+1}\right|\left(F(y_m)+F(y_{m+1})\right)d\Gamma =$$

$$= \sum_{m=1}^{|M_h|} \left|M_m M_{m+1}\right| F(y_m)d\Gamma = \sum_{m=1}^{|M_h|} h_m F(y_m)d\Gamma = \sum_{m=1}^{|M_h|} h_m F(y_m)d\Gamma.$$

Заменяем задачу (8) на задачу

$$\begin{cases} \tilde{L}_k(y) \to \min \\ y \in R^{|N_h|}. \end{cases} \tag{9}$$

Для решения $\overline{y}^k$ задачи (9) применим метод поточечной релаксации.

Зададимся начальным вектором $z^0 = \left(z_1^0, \ldots, z^0_{|N_{h_k}|}\right)$. На $(n+1)$-м шаге итерационного процесса координаты $z_i^{n+1}, i = 1,2,...,\left|N_{h_k}\right|$ определяются из условия

$$\begin{aligned} &\tilde{L}_k\left((z_1^{n+1},...,z_{i-1}^{n+1}, z_i^{n+1}, z_{i+1}^n,...,z^n_{|N_{h_k}|}), l^k\right) \le \\ &\le \tilde{L}_k\left((z_1^{n+1},...,z_{i-1}^{n+1}, t, z_{i+1}^n,...,z^n_{|N_{h_k}|}), l^k\right) \le \forall t \in (-\infty, +\infty). \end{aligned} \tag{10}$$

Модифицированная функция $\tilde{L}_k(z)$ непрерывно дифференцируема по $z_i, i = 1,...,\left|N_{h_k}\right|$. При этом

$$\frac{\partial \tilde{L}_k(z)}{\partial z_i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{|N_{h_k}|} a_{ij} z_j - p_i, если\, i \in I_{h_k} \setminus \overline{I}_{h_k} \\ \sum_{j=1}^{|N_{h_k}|} a_{ij} y_j - p_i + g h_i F'(y_i), если\, i \in \overline{I}_{h_k} \end{cases}, \tag{11}$$

где $a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla\varphi_j \nabla\varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega$, $p_i = \int_{\Omega}\left(f + \sum_j y_j^k \varphi_j\right)\varphi_i d\Omega$.

Из формулы (11) непосредственно вытекает, что $z_i^{n+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum_{j>i} a_{ij} z_j^n - p_i\right)$ для $i \in I_{h_k} \setminus \overline{I}_{h_k}$. Для $i \in \overline{I}_{h_k}$

$$z_i^{n+1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a_{ii}}\left(\sum\limits_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum\limits_{j>i} a_{ij} z_j^n - p_i + g h_k\right), \textit{если } z_i^{n+1} > \dfrac{1-\dfrac{l^k}{g}}{\dfrac{r}{g}} \\ -\dfrac{1}{a_{ii} + h_k r}\left(\sum\limits_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum\limits_{j>i} a_{ij} z_j^n - p_i + h_k l\right), \textit{если} -\dfrac{1+\dfrac{l^k}{g}}{\dfrac{r}{g}} \le z_i^{n+1} \le \dfrac{1-\dfrac{l^k}{g}}{\dfrac{r}{g}} \\ -\dfrac{1}{a_{ii}}\left(\sum\limits_{j<i} a_{ij} z_j^{n+1} + \sum\limits_{j>i} a_{ij} z_j^n - p_i - g h_k\right), \textit{если } z_i^{n+1} < -\dfrac{1+\dfrac{l^k}{g}}{\dfrac{r}{g}} \end{cases}$$

Пусть Ω – единичный квадрат. Триангуляция области Ω проведена с помощью равномерной сетки. Задача решалась на последовательности триангуляций с $h_k = 1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$, $1/64$. При этом решение на предыдущем (по k) шаге использовалось в качестве стартового элемента на следующем шаге.

Пример. Пусть функция f на всей области Ω принимает значение $-1{,}8$. Условие разрешимости выполнено, т. к. $\int\limits_{\Gamma} g d\Gamma - \left|\int\limits_{\Omega} f d\Omega\right| = 0{,}2 > 0$.

В качестве стартовой точки $(u^0, l^0) \in W_2^1(\Omega) \times W_2^{1/2}(\Gamma)$ в алгоритме возьмем (0,0). Это означает, что $z^0 = (0, \dots, 0)$. Полагаем $r = 10^6$, $g = 0{,}5$. Условия останова по внутренним итерациям (по n) и внешним (по k) соответственно такие

$$\max_i \left|z_i^{n+1} - z_i^n\right| \le 10^{-3} h_k, \ \max_i \left|\bar{y}_i^{k+1} - \bar{y}_i^k\right| \le 10^{-1} h_k.$$

Результаты решения показаны в таблице.

Шаг сетки, h	Число внешних итераций	Число всех внутренних итераций
$1/4$	2	7
$1/8$	2	30
$1/16$	2	119
$1/32$	2	273
$1/64$	2	306
Итого	10	735

Аналогичный подход, с применением модифицированных функционалов Лагранжа, был применен в [13, 14] для решения полукоэрцитивного вариационного неравенства Синьорини.

Библиографические ссылки

1. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М., 1979.
2. *Glowinski R.* Numerical methods for nonlinear variational problems. New York, Springer, 1984.
3. *Kikuchi N. and Oden T.* Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Method. Philadelphia, 1988.
4. *Кушнирук Н. Н., Намм Р. В.* Метод множителей Лагранжа для решения полукоэрцитивной модельной задачи с трением // Сиб. ЖВМ. 2009. Т. 12. № 4.
5. *Кушнирук Н. Н.* Метод Удзавы с модифицированной функцией Лагранжа для решения задачи о движении жидкости в бесконечной трубе с трением на границе // Информатика и системы управления. 2009. Т. 12. № 1(19).
6. *Решение* вариационных неравенств в механике / И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. М., 1986.
7. *Намм Р. В.* О единственности гладкого решения в статической задаче с трением по закону Кулона и двусторонним контактом // ПММ. 1995. Т. 59. № 2.
8. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М., 1987.
9. *Ito K. and Kunisch K.* Augmented Lagrangian methods for nonsmooth convex optimization in Hilbert spaces // Nonlinear Analysis. 2000. V. 41.
10. *Вихтенко Э. М., Намм Р. В.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 12.
11. *Вихтенко Э. М., Намм Р. В.* Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения квазивариационного неравенства Синьорини // Вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9.
12. *Гроссман К., Каплан А. А.* Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. Новосибирск, 1981.
13. *Намм Р. В., Ткаченко А. С.* Решение полукоэрцитивной задачи Синьорини методом итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа // Изв. высш. уч. завед. Математика. 2010. № 4.
14. *Намм Р. В., Ткаченко А. С.* Решение полукоэрцитивной скалярной задачи Синьорини методом Удзавы // Вестник Тихоокеанского государственного университета. 2007. № 4(7).