УДК 519.21, 519.24, 62-529

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 1 ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПУАССОНОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Карачанская Е. В. – канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Высшая математика», e-mail: Chalykh@mail.khstu.ru (ТОГУ)

В статье предлагается метод построения программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы, подверженной пуассоновским возмущениям.

The article considers the construction method of program control with probability one for a dynamic system that features Poisson pertubations.

Ключевые слова: первый интеграл системы СДУ, нецентрированная пуассоновская мера, программное управление, автоморфная функция.

Введение

Одной из задач управления является организация управления динамической системой таким образом, чтобы при ее эволюции важные характеристики системы (в том числе и зависящие от положения системы) сохранялись. В реальном пространстве на динамическую систему оказывают влияние случайные факторы. Наиболее удачно это случайное воздействие можно описать с помощью винеровских и пуассоновских процессов. В данной работе предлагается метод построения программного управления с вероятностью 1 для динамической системы, подверженной возмущениям в виде винеровских и пуассоновских процессов. Предложенный метод основан на понятии первого интеграла для системы стохастических дифференциальных уравнений с винеровскими и пуассоновскими возмущениями [1–3] и алгоритме построения автоморфной функции [4].

Стохастический первый интеграл системы СДУ

Пусть $\mathbf{x}(t) \in \mathrm{R}^n$, $t \geq 0$ – случайный процесс, являющийся решением системы стохастических дифференциальных уравнений

$$dx_i(t) = a_i(t;\mathbf{x}(t))dt + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(t;\mathbf{x}(t))dw_k(t) + \int_{R(\gamma)} g_i(t;\mathbf{x}(t);\gamma)\nu(dt;d\gamma)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_o)|_{t=0} = \mathbf{x}_0,\ i = \overline{1,n},\ t \geq 0, \tag{1}$$

где: $w(t)$ – m-мерный винеровский процесс, $\nu(t;\Delta\gamma)$ – однородная по t, нецент-рированная мера Пуассона [5]. Эту систему можно записать в векторной форме:

$$d\mathbf{x}(t) = A(t;\mathbf{x}(t))dt + B(t;\mathbf{x}(t))dw(t) + \int_{R(\gamma)} \nu(dt;d\gamma)\cdot G(t;\mathbf{x}(t);\gamma).$$

Относительно коэффициентов $a_i(t;\mathbf{x})$, $b_{ik}(t;\mathbf{x})$ и $g_i(t;\mathbf{x};\gamma)$ уравнения (1) будем предполагать, что они выбраны таким образом, чтобы были обеспечены условия существования и единственности решения, как и во всех уравнениях, рассматриваемых ниже.

В [1] было введено понятие первого интеграла для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито (без пуассоновской составляющей), в [3] – понятие стохастического первого интеграла для системы обобщенных стохас-тических дифференциальных уравнений Ито с центрированной пуассоновской мерой. Введем аналогичное понятие для случая наличия нецентрированной меры Пуассона.

Пусть $u(t;\mathbf{x};\omega)$ – случайная функция, определенная на том же вероятностном пространстве, что и решение системы (1).

Определение 1. *Случайную функцию* $u(t;\mathbf{x};\omega)$ *назовем стохастическим первым интегралом системы* (1), *если с вероятностью* 1 *для любого решения* $\mathbf{x}(t;\mathbf{x}(0);\omega)$ *системы* (1) *выполняется равенство:* $u(t;x(t;\mathbf{x}(0));\omega) = u(0;\mathbf{x}(0))$.

Чтобы функция $u(t;\mathbf{x};\omega)$ была первым интегралом системы (1), должны выполняться условия L):

1. $\sum_{i=1}^{n} b_{ik}(t;\mathbf{x})\dfrac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$, для всех $k = \overline{1,m}$ (компенсация винеровского возмущения).

2. $$\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}\left[a_i(t;\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{jk}(t;\mathbf{x})\frac{\partial b_{ik}(t;\mathbf{x})}{\partial x_j}\right] = 0$$

(независимость от времени).

3. $u(t;\mathbf{x}) - u(t;\mathbf{x} + G(t;\mathbf{x};\gamma)) = 0$ для любых $\gamma \in R(\gamma)$ во всей области определения процесса (компенсация пуассоновских скачков).

Замечание 1. *В случае, когда рассматриваем конкретную реализацию, т. е. параметр* ω *в дальнейшем не влияет, неслучайную функцию* $u(t;x)$ *можно считать детерминированным первым интегралом стохастической системы.*

В [3] было введено понятие стохастического первого интеграла для центрированной пуассоновской меры, и полученные условия для его существования учитывают необходимость задания плотности интенсивности пуассоновского распределения в отличие от предложенного в данной статье. Таким образом, безразлично, каков вероятностный закон имеют интенсивности пуассоновских скачков.

Построение системы обобщенных СДУ с заданным первым интегралом

Определим вид системы обобщенных стохастических уравнений Ито с начальными данными, имеющей известный стохастический первый интеграл.

Теорема 1. *Пусть функция* $u(t,\mathbf{x})$ *непрерывна вместе со своими производными по совокупности переменных* $(t,\mathbf{x})$ *и случайная функция* $u(t,\mathbf{x};\omega)$ *определена на том же вероятностном пространстве, что и решение системы стохастических дифференциальных уравнений*

$$\begin{gathered} d\mathbf{x}(t) = A(t;\mathbf{x}(t))dt + B(t;\mathbf{x}(t))d\mathbf{w}(t) + \int_{R(\gamma)} \nu(dt;d\gamma)\cdot G(t;\mathbf{x}(t);\gamma) \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_o)\big|_{t=0} = \mathbf{x}_0,\ t\ge 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где: $\mathbf{x}(t)\in \mathrm{R}^n$, $n\ge 2$; $\mathbf{w}(t)$ *–* m*-мерный винеровский процесс;* $\nu(t;\Delta\gamma)$ *– однородная по* t, *нецентрированная мера Пуассона. Если* $u(t,\mathbf{x};\omega)$ *является стохастическим первым интегралом системы (2), то коэффициенты уравнения (2) и функция* $u(t,\mathbf{x})$ *связаны следующими соотношениями:*

1) $B_k(t;\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}(t;\mathbf{x})\vec{e}_i$ $\quad (k=\overline{1,m})$ *– столбцы матрицы* $B(t;\mathbf{x})$, $B_k(t;\mathbf{x}) \in \left\{ q_{00}(t;\mathbf{x})\cdot M_{n+1,0} \right\}$, $M_{n+1,0}$ *– минор элемента* $h_{n+1,0}$ *матрицы* $H(t;\mathbf{x})$:

$$H(t;\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \\ \dfrac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial t} & \dfrac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ h_{30} & h_{31} & \dots & h_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n+1,0} & h_{n+1,1} & \dots & h_{n+1,n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

2) *коэффициент* $A(t;\mathbf{x})$ *принадлежит множеству функций, определяемых условием:*

$$A(t;\mathbf{x}) \in \left\{ R(t;\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial B_k(t;\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]\cdot B_k(t;\mathbf{x}) \right\}, \tag{4}$$

где: $\left[\dfrac{\partial B_k(t;\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]$ *– матрица Якоби для векторной функции* $B_k(t;\mathbf{x})$; $C(t;\mathbf{x})$ *– алгебраическое дополнение элемента* $\vec{e}_0$ *матрицы* $H(t;\mathbf{x})$ *и* $\det C(t;\mathbf{x})\neq 0$; *матрица-столбец* $R(t;\mathbf{x})$, *компоненты которой* $r_i(t;\mathbf{x})$, $i=\overline{1,n}$ *определяются* *следующим образом:* $C^{-1}(t;\mathbf{x})\cdot\det H(t;\mathbf{x}) = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i(t;\mathbf{x})\vec{e}_i$;

3) *коэффициент* $G(t;\mathbf{x};\gamma) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t;\mathbf{x};\gamma)\vec{e}_i$ *при пуассоновской мере определяется представлением* $G(t;\mathbf{x};\gamma) = \mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma) - \mathbf{x}$, *где* $\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma)$ *– решение системы дифференциальных уравнений:*

$$\frac{\partial \mathbf{y}(\cdot;\gamma)}{\partial\gamma} = \det\begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \\ \dfrac{\partial u(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial u(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))}{\partial y_n} \\ \varphi_{31}(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma)) & \varphi_{32}(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma)) & \cdots & \varphi_{3n}(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma)) & \varphi_{n2}(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma)) & \cdots & \varphi_{nn}(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma)) \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma)|_{\gamma=0} = \mathbf{x}$.

Относительно произвольных функций $h_{ij} = h_{ij}(t,\mathbf{x})$, $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))$ полагаем, что они выбраны таким образом, чтобы каждое семейство функций $\{h_i\}$, $\{\varphi_i\}$, определяемое условиями: $h_{ij}(t,\mathbf{x}) = \dfrac{\partial h_i(t,\mathbf{x})}{\partial x_j}$, $\varphi_{ij}(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma)) = \dfrac{\partial \varphi_i(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))}{\partial y_j}$ составляло вместе с функцией $u(t;\mathbf{x})$ совокупность независимых функций.

Доказательство. Доказательство состоит из 3-х частей.

1. Воспользуемся первым из условий L): $\sum_{i=1}^{n} b_{ik}(t;\mathbf{x})\dfrac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$, для всех $k = \overline{1,m}$. Если $B_k(t;\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}(t;\mathbf{x})\vec{e}_i$ и $\nabla_{\mathbf{x}} u(t;\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}\vec{e}_i$, то это условие – есть условие ортогональности векторов $B_k(t;\mathbf{x})$ и $\nabla_{\mathbf{x}} u(t;\mathbf{x})$. Опираясь на определение векторного произведения в пространстве R^n и его свойства, получаем утверждение для коэффициентов $B_k(t;\mathbf{x})$ и, соответственно, матрицы $B(\cdot) = (B_1(\cdot),\ldots,B_m(\cdot))$:

$$B_k(t;\mathbf{x}) \in \left\{ q_{00}(t;\mathbf{x})\cdot\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n \\ \dfrac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ f_{31} & \cdots & f_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \right\};$$

где: функции $f_i = f_i(t,\mathbf{x})$, $i=\overline{3,n}$, такие, что $f_{ij}(t,\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f_i(t,\mathbf{x})}{\partial x_j}$ вместе с функцией $u(t,\mathbf{x})$ образуют совокупность независимых функций.

2. Воспользуемся вторым из условий L):

$$\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}\left[a_i(t;\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{jk}(t;\mathbf{x})\frac{\partial b_{ik}(t;\mathbf{x})}{\partial x_j}\right] = 0.$$

Пусть $Q(t;\mathbf{x}) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i(t;\mathbf{x}) - \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{jk}(t;\mathbf{x})\dfrac{\partial b_{ik}(t;\mathbf{x})}{\partial x_j}$. Следуя схеме, изложенной в работе [2], введем в рассмотрение векторы:

$$\mathrm{W}u(t;\mathbf{x}) = \frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial t}\vec{e}_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial x_i}\vec{e}_i ,$$

$$\vec{Q}(t;\mathbf{x}) = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(t;\mathbf{x})\vec{e}_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{jk}(t;\mathbf{x})\frac{\partial b_{ik}(t;\mathbf{x})}{\partial x_j}\vec{e}_i.$$

Указанное условие означает, что векторы $\mathrm{W}u(t;\mathbf{x})$ и $\vec{Q}(t;\mathbf{x})$ ортогональны. Воспользовавшись снова определением векторного произведения и его свойствами, получаем формулу (3): $\vec{Q}(t;\mathbf{x}) \in \{\det H(t;\mathbf{x})\}$, где функции $h_i = f_i(t,\mathbf{x})$, $i = \overline{3,n+1}$, такие, что $h_{ij}(t,\mathbf{x}) = \dfrac{\partial h_i(t,\mathbf{x})}{\partial x_j}$ вместе с функцией $u(t,\mathbf{x})$ образуют совокупность независимых функций. Без ограничения общности, будем считать, что $f_{ij}(t,\mathbf{x}) = h_{ij}(t,\mathbf{x})$.

Введем вектор $\vec{A}(t;\mathbf{x}) = \vec{e}_o + \sum_{i=1}^{n} a_i(t;\mathbf{x})\vec{e}_i = \vec{Q}(t;\mathbf{x}) + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{jk}(t;\mathbf{x})\dfrac{\partial b_{ik}(t;\mathbf{x})}{\partial x_j}\vec{e}_i$ и, в силу того, что коэффициент при $\vec{e}_o$ должен быть равен 1, получаем:

$$\vec{A}(t;\mathbf{x}) \in \left\{C^{-1}(t;\mathbf{x})\cdot\det H(t;\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{jk}(t;\mathbf{x})\frac{\partial b_{ik}(t;\mathbf{x})}{\partial x_j}\vec{e}_i\right\},$$

где: $C(t;\mathbf{x})$ – алгебраическое дополнение элемента $\vec{e}_0$ матрицы $H(t;\mathbf{x})$, $\det C(t;\mathbf{x}) \neq 0$. Поскольку $C^{-1}(t;\mathbf{x})\cdot\det H(t;\mathbf{x}) = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i(t;\mathbf{x})\vec{e}_i$, то введем матрицу-столбец $R(t;\mathbf{x})$ с компонентами $r_i(t;\mathbf{x})$, $i=\overline{1,n}$.

Определение произведения матриц в данном случае допускает представление: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{jk}(t;\mathbf{x})\dfrac{\partial b_{ik}(t;\mathbf{x})}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\partial B_k(t;\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]\cdot B_k(t;\mathbf{x})$, где $\left[\dfrac{\partial B_k(t;x)}{\partial \mathbf{x}}\right]$

– матрица Якоби для векторной функции $B_k(t;\mathbf{x})$. Следовательно, $A(t;\mathbf{x})$ определяется суммой матриц (4): $A(t;\mathbf{x}) \in \left\{ R(t;\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial B_k(t;\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right] \cdot B_k(t;\mathbf{x}) \right\}$.

3. Исходя из третьего условия в L), для любых $\gamma \in R(\gamma)$ должно выполняться условие: $u(t;\mathbf{x};\omega) - u(t;\mathbf{x}+G(t;\mathbf{x};\gamma);\omega) = 0$. Это означает, что функция $u(t;\mathbf{x};\omega)$ является автоморфной при преобразовании ее аргумента $\mathbf{x}$ с помощью функции $G(t;\mathbf{x};\gamma)$. Следуя [4], положим: $\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma) = \mathbf{x} + G(t;\mathbf{x};\gamma)$. Для упрощения записи будем опускать параметр ω. Тогда $u(t;\mathbf{x}) = u(t;\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma))$ любых $\gamma \in R(\gamma)$ или $\frac{\partial u(t;\mathbf{x})}{\partial \gamma} = 0$ и $\frac{\partial u(t;y(t;\mathbf{x};\gamma))}{\partial \gamma} \equiv \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t;\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma))}{\partial y_i}\frac{\partial y_i(t;\mathbf{x};\gamma)}{\partial \gamma} = 0.$

Последнее равенство означает, что векторы $\nabla_y u(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))}{\partial y_i}\vec{e}_i$ и $\frac{\partial y(\cdot;\gamma)}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i(\cdot;\gamma)}{\partial \gamma}\vec{e}_i$ ортогональны и, следовательно, связаны соотношением:

$$\frac{\partial \mathbf{y}(\cdot;\gamma)}{\partial \gamma} \in \left\{ \det\begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n \\ \frac{\partial u(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))}{\partial y_n} \\ \varphi_{31} & \cdots & \varphi_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \right\}, \tag{6}$$

где: функции $\varphi_i(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))$, $i = \overline{3,n}$, такие, что $\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))}{\partial y_j}$, составляют с функцией $u(t;\mathbf{y}(\cdot;\gamma))$ систему независимых функций. Поскольку $\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma) = \mathbf{x} + G(t;\mathbf{x};\gamma)$, то (6) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений, в которой неизвестной является функция $\mathbf{y}(\cdot;\gamma)$. Разложим определитель (6) по первой строке. Тогда $\frac{\partial \mathbf{y}(\cdot;\gamma)}{\partial \gamma} = \alpha\sum_{i=1}^{n} S_i(\mathbf{y}(\cdot;\gamma))\vec{e}_i$, где α – произвольная функция, не зависящая от $\mathbf{y}$. Далее получаем систему дифференциальных уравнений: $\frac{\partial y_j(\cdot;\gamma)}{\partial \gamma} = \alpha S_j(\mathbf{y}(\cdot;\gamma)),\quad j = \overline{1,n}$. Пусть $\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma;\theta)$ – решение этой системы, где θ – вектор постоянных, появившихся при ее интегрировании. Поскольку условие $u(t;\mathbf{x}) = u(t;\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma))$ должно выполняться для любых значений t, $\mathbf{x}$ и γ, то:

$$u(t;\mathbf{x}) = u(t;\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma_1;\theta)) = u(t;\mathbf{x} + G(t;\mathbf{x};\gamma_1;\theta)) = u(t;\mathbf{x} + G(t;\mathbf{x};\gamma_2;\theta)) .$$

В частном случае, при некотором значении $\gamma = \gamma_o$ последнее равенство будет определяться условием $G(t;\mathbf{x};\gamma_o;\theta) = 0$. Без ограничения общности (при отсутствии скачка), положим: $G(t;\mathbf{x};\gamma_o;\theta) \equiv G(t;\mathbf{x};0) = 0$. Следовательно, функция $G(t;\mathbf{x};\gamma)$, обеспечивающая автоморфизм функции $u(t;\mathbf{x})$, определяется представлением $G(t;\mathbf{x};\gamma) = \mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma) - \mathbf{x}$, где $\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma)$ – решение системы дифференциальных уравнений (5) при начальном условии $\mathbf{y}(t;\mathbf{x};\gamma)|_{\gamma=0} = \mathbf{x}$.

Таким образом, последнее утверждение теоремы доказано.

Построение программных управлений

Очень часто возникает задачи управления динамической системой, в которой сохраняются заданные функционалы [6], причем влияние случайных возмущений, действующих на данную систему, должно быть сведено к минимуму. Понятие стохастического первого интеграла системы стохастических дифференциальных уравнений с винеровскими и пуассоновскими возмущениями позволяет строить такие управления с вероятностью 1, то есть полностью исключая влияние данных случайных возмущений.

По аналогии с [7] введем следующее определение.

Определение 2. *Программным движением стохастической системы*

$$d\mathbf{x}(t) = \left[P(t;\mathbf{x}(t)) + Q(t;\mathbf{x}(t)) \cdot s(t;\mathbf{x}(t))\right]dt + B(t;\mathbf{x}(t))d\mathbf{w}(t) + \int\limits_{R(\gamma)} G(t;\mathbf{x}(t);\gamma)\nu(dt;d\gamma), \quad (7)$$

где: $\mathbf{w}(t)$ *–* m*-мерный винеровский процесс;* $\nu(t;\Delta\gamma)$ *– нецентрированная пуассоновская мера, будем называть решение* $\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_o,s;\omega)$*, позволяющее с вероятностью* 1 *при некотором управлении (программном управлении)* $s(t;\mathbf{x})$ *для всех* t *оставаться на неслучайном интегральном многообразии* $u(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_o)) = u(0;\mathbf{x}_o)$*, являющимся первым интегралом уравнения* (1) *при заданных начальных условиях* $\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_o)|_{t=0} = \mathbf{x}_o$.

Таким образом, можно построить программное управление с вероятностью 1 для динамической системы, подверженной случайному воздействию винеровских и пуассоновских процессов.

Теорема 2. *Программное управление, позволяющее с вероятностью* 1 *динамической системе* (7) *при наличии винеровских и пуассоновских возмущений оставаться на интегральном многообразии* $u(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_o);\omega) = u(0;\mathbf{x}_o)$*, является решением системы, состоящей из уравнений* (7) *и* (2)*, в которой коэффициенты второго уравнения и соответствующие коэффициенты первого определяются в соответствии с Теоремой 1. При этом определяются также реакции на случайные возмущения, обеспечивающие это программное управление.*

Пример. Найти управления и реакции на случайные возмущения, чтобы динамическая система:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = (x_1(t) + x_2(t) + e^{-t} + s_1(t;\mathbf{x}))dt + b_1(t;\mathbf{x})dw(t) + \int_{R(\gamma)} g_1(t;\mathbf{x};\gamma)\nu(dt;d\gamma),$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = (x_1(t)x_2(t) + e^{-2t} + s_2(t;x))dt + b_2(t;\mathbf{x})dw(t) + \int_{R(\gamma)} g_2(t;\mathbf{x};\gamma)\nu(dt;d\gamma),$$

подверженная воздействию винеровского процесса и совершающая скачки по действием пуассоновского процесса, с вероятностью 1 совершала движение по поверхности $u(t;\mathbf{x}) = x_2 e^{-2x_1}$.

Решение. Сначала построим систему стохастических дифференциальных уравнений, для которой функция $u(t;\mathbf{x}) = x_2 e^{-2x_1}$ является детерминированным первым интегралом. В соответствии с утверждением 2 теоремы 1 определим функцию, обеспечивающую автоморфизм функции $u(t;\mathbf{x}) = x_2 e^{-2x_1}$. Тогда $\frac{\partial u(\mathbf{y};t)}{\partial y_1} = -2y_2 e^{-2y_1}$, $\frac{\partial u(\mathbf{y};t)}{\partial y_2} = e^{-2y_1}$ или $\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1(t;\mathbf{x};\gamma)}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y_2(t;\mathbf{x};\gamma)}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2y_1} \\ 2y_2 e^{-2y_1} \end{pmatrix}$. Решение этой системы с учетом начальных данных: $y_1(t;\mathbf{x};\gamma) = \frac{1}{2}\ln\left(2\gamma + e^{2x_1}\right)$, $y_2(t;\mathbf{x};\gamma) = 2x_2\gamma e^{-2x_1} + x_2$. Следовательно, преобразование $g(\cdot) = (g_1(\cdot), g_2(\cdot))^*$, обеспечивающее функции $u(t;\mathbf{x}) = x_2 e^{-2x_1}$ автоморфизм, имеет функции-координаты: $g_1(t;\mathbf{x};\gamma) = \frac{1}{2}\ln\left(2\gamma + e^{2x_1}\right) - x_1$ и $g_2(t;\mathbf{x};\gamma) = 2x_2\gamma e^{-2x_1}$. Теперь, в соответствии с теоремой 1, строим матрицу B (в данном случае – вектор-столбец, поскольку $w(t)$ – одномерный винеровский процесс): $B(t;\mathbf{x}) = q_{00}\left(e^{-2x_1}, 2x_2 e^{-2x_1}\right)^*$, где: $q_{00} = q_{00}(t;\mathbf{x})$,

$$\left[\frac{\partial B(t;\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right] = q_{00}\begin{pmatrix} -2e^{-2x_1} & 0 \\ 4x_2 e^{-2x_1} & 2e^{-2x_1} \end{pmatrix},$$

$\left[\frac{\partial B(t;\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right] B(t;\mathbf{x}) = q_{00}^2 \begin{pmatrix} -4e^{-2x_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4q_{00}^2 e^{-4x_1} \\ 0 \end{pmatrix}$. Опираясь на формулу (4), строим матрицу $H(t;\mathbf{x})$ и вычисляем ее определитель:

$$\det H(t;\mathbf{x}) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 0 & -2x_2e^{-2x_1} & e^{-2x_1} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{e}_0(-2f_3x_2e^{-2x_1} - f_2e^{-2x_1}) + \vec{e}_1 \cdot f_1e^{-2x_1} + \vec{e}_2 \cdot 2f_1x_2e^{-2x_1},$$

где: $f_i = f_i(t;\mathbf{x})$, $i = 1,2,3$. В итоге (из (3)), коэффициенты вектора $A = A(t;\mathbf{x})$ имеют вид: $a_1 = -\dfrac{f_1}{f_2 + 2f_3x_2} + 2q_{00}^2e^{-4x_1}$, $a_2 = -\dfrac{2f_1x_2}{f_2 + 2f_3x_2}$ и искомая система стохастических дифференциальных уравнений такова:

$$dx_1(t) = \left[\frac{-f_1}{f_2 + 2f_3x_2} + 2q_{00}^2e^{-4x_1}\right]dt + q_{00}e^{-2x_1}dw(t) + \int_{R(\gamma)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(2\gamma + e^{2x_1}\right) - x_1\right)\nu(dt;d\gamma)$$

$$dx_2(t) = \left[\frac{-2f_1x_2}{f_2 + 2f_3x_2}\right]dt + 2q_{00}x_2e^{-2x_1}dw(t) + \int_{R(\gamma)}(2x_2\gamma e^{-2x_1})\nu(dt;d\gamma)$$

Искомое управление – решение системы линейных уравнений (теорема 2): $x_1 + x_2 + e^{-t} + s_1(t;\mathbf{x}) = \dfrac{-f_1}{f_2 + 2f_3x_2} + 2q_{00}^2e^{-4x_1}$; $x_1x_2 + e^{-2t} + s_2(t;\mathbf{x}) = \dfrac{-2f_1x_2}{f_2 + 2f_3x_2}$.

Или:

$$s_1(t;\mathbf{x}) = \frac{-f_1}{f_2 + 2f_3x_2} + 2q_{00}^2e^{-4x_1} - x_1 - x_2 - e^{-t},$$

$$s_2(t;\mathbf{x}) = \frac{-2f_1x_2}{f_2 + 2f_3x_2} - x_1x_2 - e^{-2t},$$

где: $f_i = f_i(t;\mathbf{x})$, $i = 1,2,3$, $q_{00} = q_{00}(t;\mathbf{x})$. Реакция на возмущение, вызванное винеровским процессом, определяется матрицей-столбцом с элементами:

$$b_1(t;\mathbf{x}) = q_{00}e^{-2x_1},\ b_2(t;\mathbf{x}) = 2q_{00}x_2e^{-2x_1}.$$

Элементы для компенсатора пуассоновских скачков определяются следующим образом: $g_1(t;\mathbf{x};\gamma) = \dfrac{1}{2}\ln\left(2\gamma + e^{2x_1}\right) - x_1$, $g_2(t;\mathbf{x};\gamma) = 2x_2\gamma e^{-2x_1}$.

Выбор функций $f_i(t;\mathbf{x})$, $i = 1,2,3$ и $q_{00}(t;\mathbf{x})$ позволяет строить управление, опираясь, например, на удобство для моделирования и реализации управления.

Замечание 2. *Отметим, что можно строить программные управления по многообразию, определяемому несколькими функциями* [6].

Выводы

Применение теории стохастического первого интеграла позволяет строить с вероятностью 1 программные управления для динамической системы при наличии случайных возмущений, вызванных винеровскими [7] и пуассоновскими процессами.

Автор благодарен проф. В. А. Дубко за внимание к данной работе.

Библиографические ссылки

1. *Дубко В. А.* Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений: припринт. – Киев : АН УССР, Ин-т математики, 1978.
2. *Дубко В. А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1989.
3. *Дубко В. А.* Открытые эволюционирующие системы. // "Відкриті еволюціонуючі системи" міжнар. наук.-практ. конф. (2002, Київ). Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючі системи" (26-27 квіт. 2002 р.) (Додаток). К., ВНЗ ВМУРоЛ, 2002.
4. *Дубко В. А.* Проблема инвариантности и алгоритм построения множества автоморфных преобразований для заданной функции. // "Відкриті еволюціонуючі системи" міжнар. наук.-практ. конф. (II; 2003, Київ). Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючі системи" (1–30 грудня 2003 р.). – Т. II, К., ВНЗ ВМУРоЛ, 2004.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. Думка, 1968.
6. *В поисках* скрытого порядка (Методологические проблемы изучения региона) / В. А. Дубко, Ф. Н. Рянский, Э. М. Сороко, В. Н. Шолпо, В. В. Юшманов. – Владивосток: Дальнаука, 1995.
7. *Чалых Е. В.* Построение множества программных управлений с вероятностью 1 для одного класса стохастических систем // Автоматика и телемеханика. – 2009. – Т. 70. – № 8.