УДК 517.938

К ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОБЛАСТИ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Айсагалиев С. А. – д-р техн. наук, проф., завкафедрой «Теория управления»; *Шаназаров Д. Г.* – канд. физ.-мат. наук, соискатель кафедры «Теория управления» (Казахский национальный университет им. аль-Фараби)

На основе оценки несобственных интегралов на множестве решений динамической системы разработан новый метод определения области абсолютной устойчивости регулируемых систем. Данный метод позволяет выделить более широкую область абсолютной устойчивости по сравнению с известными критериями. Эффективность предлагаемого метода показана на примере.

The new method of defining the domain of absolute stability of regular systems is been developed on the base of evaluation of improper integrals on the solution set of the given dynamic system. In compare with known criterions proposed method allows to obtain a wider domain of absolute stability. Efficiency of the proposed method is shown by practical task.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения регулируемой системы вида

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \ \sigma = Sx, \ x(0) = x_0, \ t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

где A, B, S – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно, матрица A – гурвицева, т. е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n}$; $\lambda_j(A)$, $j = \overline{1,n}$ – собственные значения матрицы A.

Функция $\varphi(\sigma)$ является элементом следующего множества

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1),\ldots,\varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) \mid 0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_{0i}\sigma_i^2, \ \forall \sigma_i \in R^1, \ i = \overline{1,m}; \ \varphi(0) = 0\}. \tag{2}$$

Для регулируемых систем с ограниченными ресурсами функция $\varphi(\sigma)$ является элементом множества:

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in \Phi_0 \ / \left|\varphi_i(\sigma_i)\right| \le \varphi_i^*,$$

$$\varphi_i^* = const > 0,\ 0 < \varphi_i^* < \infty \quad i = \overline{1,m} \}. \tag{3}$$

Положение равновесия системы (1) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Sx_*$. Так как матрица A – гурвицева, то $x_* = -A^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, $\sigma_* = -SA^{-1}B\varphi(\sigma_*)$. Тогда, если матрица $-SA^{-1}B$ не особая, система (1) имеет единственное положение равновесия ($x_* = 0,\ \sigma_* = 0$), для любых $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ (либо $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$).

Определение 1. Говорят, что тривиальное решение $x_* = 0$ системы (1), (2) (либо (1), (3)) абсолютно устойчиво, если матрицы A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \overline{\mu}_0$ гурвицевы, где $\mu = diag(\mu_1,...,\mu_m)$, $\overline{\mu}_0 = diag(\overline{\mu}_{01},...,\overline{\mu}_{0m})$, $0 \le \mu_i \le \overline{\mu}_{0i}$, $i = \overline{1,m}$, и для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ (либо $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$) предел $\lim\limits_{t\to\infty} x(t;0,x_0,\varphi) = 0$, $\forall x_0$, $|x_0| < \infty$.

Определение 2. Критерием абсолютной устойчивости для систем (1)-(2), (1)-(3) называются алгебраические или другие соотношения, связывающие матрицы (A,B,S,μ_0), $\mu_0 = diag(\mu_{01},...,\mu_{0m})$, $\mu_{0i} \le \overline{\mu}_{01}$, $i = \overline{1,m}$, при выполнении которых тривиальное решение $x_* = 0$ абсолютно устойчиво.

Ставится следующая задача: найти критерий абсолютной устойчивости положения равновесия систем (1)-(2), (1)-(3);

Основные леммы

Для формулировки и доказательства основных результатов необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть матрица SB порядка $m \times m$ не особая, $T_1 = diag(T_{11},T_{12},...,T_{1m})$, $T_2 = diag(T_{21},T_{22},...,T_{2m})$, $H_1 = H_1^*$ – матрица порядка $n \times n$. Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла*

$$I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \{\omega^*(t)P_0\omega(t) + \omega^*(t)P_1x(t) + x^*(t)P_2x(t)\}dt \le \ell_0 +$$

$$+ \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\left[H_1 - \frac{1}{2}S^*T_2^+S\right]x(T) +$$

$$+ x_0^*\left[H_1 - \frac{1}{2}S^*T_2^+S\right]x_0, \quad \omega(t) = \dot{\sigma}(t),\ t \in I, \tag{4}$$

где матрицы P_0, P_1, P_2, T_2^+, постоянная ℓ_0, функция $\overline{\varphi}(\sigma)$ определяются следующим образом:

$$P_0 = (SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1} + \frac{1}{2}(SB)^{*-1}T_2 + \frac{1}{2}T_2(SB)^{-1}, \tag{5}$$

$$P_1 = -2(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA - (SB)^{*-1}T_1S -$$

$$-T_2(SB)^{-1}SA - 2(SB)^{*-1}B^*H_1 \qquad (6)$$

$$P_2 = A^*S^*(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA +$$
$$+ A^*S^*(SB)^{*-1}T_1S - 2\left[A - B(SB)^{*-1}SA\right]^*H_1. \qquad (7)$$

$$T_2^+ = \begin{cases} 0, \text{ если } T_2 \le 0, \\ \mu_0 T_2, \text{ если } T_2 > 0, \end{cases} \qquad \overline{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma), \text{ если } T_2 \le 0, \\ \varphi(\sigma) - \mu_0\sigma, \text{ если } T_2 > 0, \end{cases}$$

$$\ell_0 = \begin{cases} \overline{\ell}_0 = -\int\limits_0^{\sigma(0)} \varphi^*(\sigma)T_2 d\sigma, \text{ если } T_2 \le 0, \\ \overline{\overline{\ell}}_0 = -\int\limits_0^{\sigma(0)} \overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma, \text{ если } T_2 > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Так как $\dot{\sigma} = S\dot{x}(t) = SAx(t) + SB\varphi(\sigma(t))$, $\dot{\sigma} = \omega(t)$, $t \in I$, матрица SB порядка $m \times m$ не особая, то

$$\varphi(\sigma(t)) = (SB)^{-1}\omega(t) - (SB)^{-1}SAx(t), \; t \in I. \qquad (8)$$

Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует, что для любой диагональной матрицы $T_1 \ge 0$ справедливо неравенство

$$\varphi^*(\sigma(t))T_1\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t)) - \varphi^*(\sigma(t))T_1\sigma(t) \le 0, \; \forall t, \; t \in I \qquad (9)$$

Пусть $T_2 = diag(T_{21}, T_{22}, ..., T_{2m})$, тогда справедливы соотношения:

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \varphi^*(\sigma(t))T_2\dot{\sigma}(t)dt = \overline{\ell}_0 + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)} \varphi^*(\sigma)T_2 d\sigma, \text{ если } T_2 \le 0; \qquad (10)$$

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \varphi^*(\sigma(t))T_2\dot{\sigma}(t)dt = \overline{\overline{\ell}}_0 + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)} \left[\varphi(\sigma) - \mu_0\sigma\right]^* T_2 d\sigma +$$
$$+\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\sigma^*(T)\mu_0 T_2\sigma(T) - \frac{1}{2}\sigma^*(0)\mu_0 T_2\sigma(0), \text{ если } T_2 > 0. \qquad (11)$$

Для любой симметричной матрицы $H_1 = H_1^*$ порядка $n \times n$ верно равенство

$$-2\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \dot{x}^*(t)H_1x(t)dt = -\lim_{T\to\infty}x^*(T)H_1x(T) + x_0^*H_1x_0, \qquad (12)$$

где (*) – знак транспонирования.

Из соотношений (9)-(12), с учетом тождества (8), получим оценку (4), где P_0, P_1, P_2 определяются формулами (5)-(7). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и пусть, кроме того:*

1) *Матрица θ порядка $m \times n$ такая, что $\theta B = 0$;*
2) *Матрица $H_2 = H_2^*$ порядка $m \times m$.*

Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла

$$I_2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \{\omega^*(t)P_0\omega(t) + \omega^*(t)P_3x(t) + x^*(t)P_4x(t)\}dt \le \ell_0 +$$
$$+\lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\left[H_1 - \frac{1}{2}S^*T_2^+S - A^*\theta^*H_2S\right]x(T) +$$
$$+ x_0^*\left[H_1 - \frac{1}{2}S^*T_2^+S - A^*\theta^*H_2S\right]x_0, \tag{13}$$

где матрицы

$$P_3 = P_1 + H_2^*\theta A + (SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S, \tag{14}$$
$$P_4 = P_2 + A^{*2}\theta^*H_2S - A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S. \tag{15}$$

Доказательство. Так как выполнены условия леммы 1, то верна оценка (4). По условию леммы $\theta B = 0$, тогда $\theta\dot{x}(t) = \theta Ax(t)$, $t \in I$. Следовательно,

$$\theta\ddot{x}(t) = \theta A^2x(t) + \theta AB\varphi(\sigma(t)),\ t \in I. \tag{16}$$

Поскольку,

$$\frac{d}{dt}\left[(\theta\dot{x}(t))^*H_2\sigma(t)\right] = \left[\theta\ddot{x}(t)\right]^*H_2\sigma(t) + \left[\theta\dot{x}(t)\right]^*H_2\omega(t) =$$
$$= x^*(t)A^{*2}\theta^*H_2Sx(t) + \varphi^*(\sigma(t))B^*A^*\theta^*H_2\sigma(t) + \omega^*(t)H_2\theta Ax(t),\ t \in I,$$

где функция $\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ удовлетворяет тождеству (8), то

$$\frac{d}{dt}\left[(\theta\dot{x}(t))^*H_2\sigma(t)\right] = x^*(t)\left[A^{*2}\theta^*H_2S - A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S\right]x(t) +$$
$$+ \omega^*(t)\left[H_2^*\theta A + (SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S\right]x(t),\ t \in I.$$

Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \{x^*(t)\left[A^{*2}\theta^*H_2S - A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S\right]x(t) +$$
$$+ \omega^*(t)\left[H_2^*\theta A + (SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S\right]x(t)\}dt =$$
$$= \lim_{T\to\infty} x^*(T)A^*\theta^*H_2Sx(T) - x_0^*A^*\theta^*H_2Sx_0. \tag{17}$$

Суммируя несобственные интегралы (4), (17) получим оценку (13). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть матрица SB не особая,* $H_2 = H_2^*$ T_3, P, W *– матрицы порядков* $m\times m$, $m\times m$, $m\times m$, $m\times n$ *соответственно. Тогда вдоль решения системы (1), (2) верно равенство*

$$I_3 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \{\varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right] + \left[\omega(t) + Wx(t)\right]^*T_3\left[\omega(t) + Wx(t)\right] +$$
$$+ x^*(t)\left[\frac{1}{2}\left(\theta A^2 + S\right)^*H_2\left(\theta A^2 + S\right) + \frac{1}{2}\left(SA + \theta A\right)^*H_2\left(SA + \theta A\right)\right]x(t)\ \}dt =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\omega^*(t)L_0\omega(t)+\omega^*(t)L_1x(t)+x^*(t)L_2x(t)\right]dt, \qquad (18)$$

где матрицы

$$L_0=T_3-(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}, \qquad (19)$$

$$L_1=2T_3W+(SB)^{-1}PS+2(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA, \qquad (20)$$

$$L_2=W^*T_3W-A^*S^*(SB)^{*-1}PS+A^*S^*(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA+H, \qquad (21)$$

$$H=\frac{1}{2}\left(\theta A^2+S\right)^*H_2\left(\theta A^2+S\right)+\frac{1}{2}\left(SA+\theta A\right)^*H_2\left(SA+\theta A\right). \qquad (22)$$

Доказательство. На основе тождества (8), имеем

$$\varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t)-\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]=\omega^*(t)\left[-(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}\right]\omega(t)+$$
$$+\omega^*(t)\left[2(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA+(SB)^{*-1}PS\right]x(t)+$$
$$+x^*(t)\left[-A^*S^*(SB)^{*-1}PS-A^*S^*(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA\right]x(t), \quad t\in I. \qquad (23)$$

Произведение

$$\left[\omega(t)+Wx(t)\right]^*T_3\left[\omega(t)+Wx(t)\right]=\omega^*(t)T_3\omega(t)+$$
$$+2\omega^*(t)T_3Wx(t)+x^*(t)W^*T_4Wx(t), \quad t\in I. \qquad (24)$$

Суммируя (23), (24) и x^*Hx получим равенство (18). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия лемм 1-3, и, кроме того*

$$\mu_0=\left[(SB)^*T_3(SB)-\frac{1}{2}T_2(SB)-\frac{1}{2}(SB)^*T_2\right]^{-1}(T_1+P), \qquad (25)$$

$$2(SB)^{*-1}B^*H_1+\left[(SB)^{*-1}(T_1+P)-(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2\right]S-H_2^*\theta A+$$
$$+2T_3(W+SA)-(SB)^{*-1}T_2SA=0, \qquad (26)$$

$$A^*H_1+H_1A=-(W+SA)^*T_3(W+SA)-H_3, \qquad (27)$$

$$H_3=\frac{1}{2}\left[A^{*2}\theta^*H_2\theta A+S^*H_2S+A^*S^*H_2SA+A^*\theta^*H_2\theta A\right]. \qquad (28)$$

Тогда, вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла

$$I_3=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\Big\{\varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t)-\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]+\left[\omega(t)+Wx(t)\right]^*T_3\left[\omega(t)+Wx(t)\right]+$$
$$+x^*(t)Hx(t)\Big\}dt\le\ell_0+\lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\overline{\varphi}^*(\sigma)T_2d\sigma- \qquad (29)$$
$$-x^*(T)\left[H_1-\frac{1}{2}S^*T_2^+S-A^*\theta^*H_2S\right]x(T)+x_0^*\left[H_1-\frac{1}{2}S^*T_2^+S-A^*\theta^*H_2S\right]x_0,.$$

Доказательство. Покажем, что несобственные интегралы I_2 и I_3 равны. В самом деле, из равенства $P_0=L_0$ следует, что

$$T_3-(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}=(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}+\frac{1}{2}(SB)^{*-1}T_2+\frac{1}{2}T_2(SB)^{-1}.$$

Отсюда, умножая полученное равенство слева на матрицу $(SB)^*$ и справа на (SB), получим

$$(SB)^*T_3(SB)-P\mu_0^{-1}=T_1\mu_0^{-1}+\frac{1}{2}T_2(SB)+\frac{1}{2}(SB)^*T_2.$$

Тогда

$$(T_1+P)\mu_0^{-1}=(SB)^*T_3(SB)-\frac{1}{2}T_2(SB)-\frac{1}{2}(SB)^*T_2.$$

Следовательно,

$$\mu_0^{-1}=\left[(SB)^*T_3(SB)-\frac{1}{2}T_2(SB)-\frac{1}{2}(SB)^*T_2\right](T_1+P),$$

т. е. выполнено равенство (25). Поскольку, преобразование не особое, то верно обратное утверждение о том, что из равенства (25) следует, что $P_0=L_0$.

Рассмотрим равенство $P_3=L_1$. Как следует из формул (14), (20), выполнено следующее равенство

$$2T_3W+(SB)^{*-1}PS+2(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA=-2(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA-$$
$$-(SB)^{*-1}T_1S-T_2(SB)^{-1}SA-2(SB)^{*-1}B^*H_1+H_2^*\theta A+(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S.$$

Отсюда, с учетом того, что

$$2(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA=2T_3SA-2(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA-$$
$$-(SB)^{*-1}T_2SA-T_2(SB)^{-1}SA,$$

получим

$$2T_3W+(SB)^{*-1}PS+2T_3SA-2(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA-(SB)^{*-1}T_2SA-$$
$$-T_2(SB)^{-1}SA=-2(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA-(SB)^{*-1}T_1S-T_2(SB)^{-1}SA-$$
$$-2(SB)^{*-1}B^*H_1+H_2^*\theta A+(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S.$$

Тогда

$$2(SB)^{*-1}B^*H_1+\left[(SB)^{*-1}(T_1+P)-(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2\right]S+$$
$$+2T_3(W+SA)-H_2^*\theta A-(SB)^{*-1}T_2SA=0. \qquad (30)$$

Аналогично, из равенства $P_4=L_2$, имеем

$$W^*T_3W-A^*S^*(SB)^{*-1}PS-A^*S^*(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA+H=$$
$$=A^*S^*(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA+A^*S^*(SB)^{*-1}T_1S-2A^*H_1+$$
$$+2A^*S^*(SB)^{*-1}B^*H_1+A^{*2}\theta^*H_2S-A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S. \qquad (31)$$

Так как

$$-A^*S^*(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA=-A^*S^*T_3SA+A^*S^*(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA+$$

$$+\frac{1}{2}A^*S^*(SB)^{*-1}T_2SA+\frac{1}{2}A^*S^*T_2(SB)^{-1}SA,$$

то равенство (31) запишется так

$$W^*T_3W - A^*S^*(SB)^{*-1}PS - A^*S^*T_3SA + A^*S^*(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA +$$
$$+\frac{1}{2}A^*S^*(SB)^{*-1}T_2SA+\frac{1}{2}A^*S^*T_2(SB)^{-1}SA + H = A^*S^*(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA +$$
$$+ A^*S^*(SB)^{*-1}T_1S - 2A^*H_1 + 2A^*S^*(SB)^{*-1}B^*H_1 + A^{*2}\theta^*H_2S -$$
$$- A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S.$$

Отсюда имеем

$$W^*T_3W - A^*S^*(SB)^{*-1}(T_1+P)S - A^*S^*T_3SA + A^*S^*(SB)^{*-1}T_2SA +$$
$$+ H + 2A^*H_1 - A^{*2}\theta^*H_2S + A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S =$$
$$= 2A^*S^*(SB)^{*-1}B^*H_1. \qquad (32)$$

Как следует из формулы (30) верно равенство

$$2A^*S^*(SB)^{*-1}B^*H_1 = A^*S^*\{[-(SB)^{*-1}(T_1+P)+(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2]S -$$
$$2T_3(W+SA)+H_2^*\theta A-(SB)^{*-1}T_2SA\} = -A^*S^*(SB)^{*-1}(T_1+P)S +$$
$$+ A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S - 2A^*S^*T_3(W+SA) +$$
$$+ A^*S^*H_2^*\theta A + A^*S^*(SB)^{*-1}T_2SA. \qquad (33)$$

Из равенств (32), (33) получим

$$W^*T_3W + H + 2A^*H_1 - 2A^{*2}\theta^*H_2S = -A^*S^*T_3SA - 2A^*S^*T_3W + A^*S^*H_2^*\theta A.$$

Отсюда следует, что

$$2A^*H_1 = -(W+SA)^*T_3(W+SA) - H + A^{*2}\theta^*H_2S + A^*S^*H_2\theta A. \qquad (34)$$

Поскольку, все вышеприведенные матричные равенства относятся к квадратичной форме по x, то верны равенства

$$\frac{1}{2}\left(\theta A^2+S\right)^*H_2\left(\theta A^2+S\right) = \frac{1}{2}A^{*2}\theta^*H_2\theta A^2 + \frac{1}{2}S^*H_2S +$$
$$+\frac{1}{2}A^{*2}\theta^*H_2S + \frac{1}{2}S^*H_2\theta A^2,$$

$$\frac{1}{2}\left(SA+\theta A\right)^*H_2\left(SA+\theta A\right) = \frac{1}{2}A^*S^*H_2SA + \frac{1}{2}A^*\theta^*H_2\theta A +$$
$$+\frac{1}{2}A^*S^*H_2\theta A + \frac{1}{2}A^*\theta^*H_2SA,$$

$$A^*S^*H_2\theta A = \frac{1}{2}A^*S^*H_2\theta A + \frac{1}{2}A^*\theta^*H_2SA,$$

$$A^{*2}\theta^*H_2S = \frac{1}{2}A^{*2}\theta^*H_2S + \frac{1}{2}S^*H_2\theta A^2.$$

Тогда сумма

$$- H + A^{*2}\theta^*H_2S + A^*S^*H_2\theta A =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[A^{*2}\theta^* H_2\theta A^2 + S^* H_2 S + A^* S^* H_2 SA + A^*\theta^* H_2\theta A\right].$$

Теперь, равенство (34) запишется в виде

$$A^* H_1 + H_1 A = -(W + SA)^* T_3 (W + SA) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[A^{*2}\theta^* H_2\theta A^2 + S^* H_2 S + A^* S^* H_2 SA + A^*\theta^* H_2\theta A\right]. \quad (35)$$

Из равенств (30), (35) следует, что выполнены условия (26)-(28) леммы. Следовательно, $I_2 = I_3$. Поскольку преобразования не особые, то верно обратное утверждение о том, что из условий (25)-(28) леммы следует, что $I_2 = I_3$. Лемма доказана.

Заметим, что:

1. В случае, когда матрица $H_2 = 0$, равенства (25)-(28) имеют вид

$$\mu_0 = \left[(SB)^* T_3 (SB) - \frac{1}{2} T_2 (SB) - \frac{1}{2}(SB)^* T_2\right]^{-1} (T_1 + P), \quad (36)$$

$$2(SB)^{*-1} B^* H_1 + (SB)^{*-1}(T_1 + P)S + 2T_3(W + SA) - (SB)^{*-1} T_3 SA = 0, \quad (37)$$

$$A^* H_1 + H_1 A = -(W + SA)^* T_3 (W + SA), \quad (38)$$

2. Леммы 1-4 остаются верны и для системы (1), (3).

Лемма 5. *Если матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$, то верны оценки*

$$|x(t)| \le c_0,\ |\dot{x}(t)| \le c_1,\ |\sigma(t)| \le c_2,\ |\dot{\sigma}(t)| \le c_3\ \forall t,\ t \in I, \quad (39)$$

где $c_i = const > 0$, $i = \overline{0,3}$. Кроме того, функции $x(t), \sigma(t), t \in I$ - равномерно непрерывны.

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$ следует, что $|\varphi(\sigma)| \le \varphi_*$, $\varphi_* = const > 0$, $\forall t$, $t \in I$. Так как матрица A – гурвицева, то $\|e^{At}\| \le ce^{(a+\varepsilon)t}$, $\forall t$, $t \in I$, где $a = \max_{1 \le j \le n} Re\lambda_j(A)$, $c = c(\varepsilon) = const > 0$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\varphi(\sigma(\tau))d\tau$, $t \in I$. Тогда

$$|x(t)| \le \|e^{At}\||x_0| + \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\|\|B\||\varphi(\sigma(\tau))|d\tau \le c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t}\|B\|\varphi_* \int_0^t e^{-(a+\varepsilon)\tau}d\tau =$$

$$= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t}\|B\|\varphi_*\left[-\frac{1}{a+\varepsilon}e^{-(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}\right] = c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} +$$

$$+ \frac{1}{a+\varepsilon}c\|B\|\varphi_*\left[-1 + e^{(a+\varepsilon)t}\right] \le c_0,$$

где $e^{(a+\varepsilon)t} \le 1$, $\forall t$, $t \in I$ $a + \varepsilon < 0$. Из (1) следует, что

$|\dot{x}(t)| \le \|A\| |x(t)| + \|B\| \varphi_* \le c_1$, $t \in I$. Поскольку $\sigma(t) = Sx(t)$, $\dot{\sigma}(t) = S\dot{x}(t)$, то $|\sigma(t)| = \|S\| |x(t)| \le c_2$, $|\dot{\sigma}(t)| = \|S\| |\dot{x}(t)| \le c_3$, $t \in I$. Из ограниченности $\dot{x}(t)$, $\dot{\sigma}(t)$, $t \in I$ следуют равномерная непрерывность функций $x(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$. Лемма доказана.

Абсолютная устойчивость

На основе лемм 1-5 сформулируем критерии абсолютной устойчивости в отдельности для систем вида (1), (2) и (1), (3).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Условия лемм 1-4;*
2) *Равенства (25)-(28), матрицы* $P = P^* > 0$, $T_3 > 0$, $H \ge 0$;
3) *Матрицы A,* $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \le \bar{\mu}_0$ *– гурвицевы;*
4) *Функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$ *непрерывна по* σ, $\sigma \in R^m$.

Тогда положение равновесия системы (1), (3) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Поскольку выполнены условия лемм 1-4 и равенства (25)-(28), то верна оценка (29), где матрицы $P = P^* \ge 0$, $T_3 > 0$, $H \ge 0$.

Заметим, что $\varphi(\sigma) = k(\sigma)\sigma$, $k(\sigma) = diag(k_1(\sigma),...,k_m(\sigma))$, $0 \le k(\sigma) < \mu_0$. Тогда $\sigma - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma) = \sigma - \mu_0^{-1}k(\sigma)\sigma = [I_m - \mu_0^{-1}k(\sigma)]\sigma$, где $I_m - \mu_0^{-1}k(\sigma) > 0$. Следовательно, если матрица $P = P^* \ge 0$, то

$$\varphi^*(\sigma)P[\sigma - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma)] = \sigma^* k(\sigma)P[I_m - \mu_0^{-1}k(\sigma)]\sigma \ge 0,\ \forall \sigma,\ \sigma \in R^m.$$

Так как матрица $T_3 > 0$, $H \ge 0$, то из оценки (29) имеем

$$0 \le \lim_{T\to\infty} \int_0^T \{\varphi^*(\sigma(t))P[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))]\}dt \le$$

$$\le \ell_0 + \lim_{T\to\infty} \int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Sigma x(T) + x_0^*\Sigma x_0, \qquad (40)$$

$$\Sigma = H_1 - \frac{1}{2}S^*T_2^+S - \frac{1}{2}A^*\theta^*H_2S - \frac{1}{2}S^*H_2\theta A. \qquad (41)$$

Заметим, что

$$\int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma \le 0,\ \forall \sigma(T) \in R^m$$

для любой диагональной матрицы $T_2 > 0$. Поскольку матрица A – гурвицева, $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$, то функции $x(t)$, $\sigma(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{\sigma}(t)$, $t \in I$ ограничены, $x(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$ – равномерно непрерывны (см. лемму 5). Из ограниченности $x(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$ следует, что

$$\ell_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Sigma x(T) + x_0^*\Sigma x_0 < \infty .$$

Теперь неравенство (40) запишется так

$$0 \le \lim_{T\to\infty}\int_0^T V(\sigma(t))dt < \infty , \qquad (42)$$

$$V(\sigma(t)) = \varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right] =$$
$$= \sigma^*(t)k(\sigma(t))P\left[I_m - \mu_0^{-1}K(\sigma(t))\right]\sigma(t) > 0,$$

$V(0)=0$, $V(\sigma)$ – равномерно непрерывная функция по σ, $\sigma \in R^m$. Из (42), в силу равномерной непрерывности функции σ, $t \in I$, имеем $\lim_{T\to\infty}\sigma(t)=0$. Так как $\varphi(0)=0$, то $\lim_{T\to\infty}\varphi(\sigma(t))=0$. Тогда $\lim_{T\to\infty}x(t)=0$, в силу гурвицевости матрицы A и автономности системы. Следовательно, согласно определению 1, положение равновесия системы (1), (3) абсолютно устойчиво. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *Условия лемм 1-4;*
2) *Равенства (25)-(28), матрицы* $P=P^*>0$, $T_3>0$, $H\ge 0$;
3) *Матрицы* A, $A+B\mu S$, $0\le\mu\le\overline{\mu}_0$, $\mu_0\le\overline{\mu}_0$ *– гурвицевы;*
4) *Функция* $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$ *непрерывна по* σ, $\sigma\in R^m$.

Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\left[\dot\sigma(t)+Wx(t)\right]=0 . \qquad (43)$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Для данного случая, из оценки (29), получаем

$$0 \le \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\dot\sigma(t)+Wx(t)\right]^* T_3\left[\dot\sigma(t)+Wx(t)\right]dt < \infty , \qquad (44)$$

где $\dot\sigma(t)=SAx(t)+SB\varphi(\sigma(t))$, $x(t)$, $t\in T$ – равномерно непрерывные функции в силу леммы 5 и равномерной непрерывности функции $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$ по σ, $\sigma\in R^m$. Тогда из (44) следует (43). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *Условия лемм 1-4;*
2) *Равенства (25)-(28), матрицы* $P=P^*>0$, $T_3>0$, $H=Q^*Q\ge 0$;
3) *Матрицы* A, $A+B\mu S$, $0\le\mu\le\overline{\mu}_0$, $\mu_0\le\overline{\mu}_0$ *- гурвицевы;*
4) *Функция* $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$ *непрерывна по* σ, $\sigma\in R^m$.

Тогда

$$\lim_{T\to\infty}Qx(t)=0 . \qquad (45)$$

Доказательство. Для данного случая, из оценки (29), имеем

$$0 \le \lim_{T\to\infty}\int_0^T x^*(t)Q^*Qx(t)dt < \infty, \qquad (46)$$

где Q – матрица порядка $m \times n$, $H = Q^*Q \ge 0$, $x(t)$, $t \in T$ – равномерно непрерывные функции в силу леммы 5. Тогда из (46) следует (45). Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Условия лемм 1-4;*
2) *Равенства (25)-(28), матрицы* $P = P^* > 0$, $T_3 > 0$, $H \ge 0$;
3) *Матрицы* A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \le \bar{\mu}_0$ *– гурвицевы;*
4) *Функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *непрерывна по* σ, $\sigma \in R^m$;
5) *Матрица* $\Sigma = \Sigma^* > 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Поскольку выполнены условия леммы 1-4, то верна оценка (29). Так как матрицы $P = P^* \ge 0$, $T_3 > 0$, $H \ge 0$, то оценка (29) запишется в виде

$$0 \le \lim_{T\to\infty}\int_0^T \{\varphi^*(\sigma(t))P[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))] + [\omega(t) + Wx(t)]^* T_3[\omega(t) + Wx(t)] +$$
$$+ x^*(t)Hx(t)\}dt \le \ell_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Sigma x(T) + x_0^*\Sigma x_0, \qquad (47)$$

где матрица (см. (41)) $\Sigma = H_1 - \frac{1}{2}S^*T_2^+S - \frac{1}{2}A^*\theta^*H_2S - \frac{1}{2}S^*H_2\theta A > 0$.

Покажем, что если матрица $\Sigma > 0$, то решение системы (1), (2) ограниченно. Предположим противное. Тогда $\lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma \le 0$ (возможно $\lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma = -\infty$), $-\lim_{T\to\infty} x^*(T)\Sigma x(T) = -\infty$, где $\ell_0 = const$, $x_0^*\Sigma x_0$ – конечные числа. Теперь неравенство (47) запишется

$$0 \le \lim_{T\to\infty}\int_0^T \{\varphi^*(\sigma(t))P[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))] + [\omega(t) + Wx(t)]^* T_3[\omega(t) + Wx(t)] +$$
$$+ x^*(t)Hx(t)\}dt < -\infty.$$

Но, этого не может быть. Следовательно, в случае, когда матрица $\Sigma > 0$, решение системы (1), (2) ограниченно, т. е.

$$0 \le \lim_{T\to\infty}\int_0^T \{\varphi^*(\sigma(t))P[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))] +$$
$$+ [\omega(t) + Wx(t)]^* T_3[\omega(t) + Wx(t)] + x^*(t)Hx(t)\}dt < \infty. \qquad (48)$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 1, из оценки (48) получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *Условия лемм 1-4;*
2) *Равенства (25)-(28), матрицы* $P = P^* > 0$, $T_3 > 0$, $H \geq 0$;
3) *Матрицы A,* $A + B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \leq \bar{\mu}_0$ *– гурвицевы;*
4) *Функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *непрерывна по* σ, $\sigma \in R^m$.

Тогда $\lim\limits_{T \to \infty} \left[\dot{\sigma}(t) + Wx(t)\right] = 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из оценки (48), где $\dot{\sigma}(t)$, $x(t)$ – равномерно непрерывные функции и выполнена оценка (44). Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *Условия лемм 1-4;*
2) *Равенства (25)-(28), матрицы* $P = P^* > 0$, $T_3 > 0$, $H = Q^*Q \geq 0$;
3) *Матрицы A,* $A + B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \leq \bar{\mu}_0$ *– гурвицевы;*
4) *Функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *непрерывна по* σ, $\sigma \in R^m$;
5) *Матрица* $\Sigma = \Sigma^* > 0$.

Тогда $\lim\limits_{T \to \infty} Qx(t) = 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из оценки (48). В данном случае выполнено неравенство (46). Теорема доказана.

Эффективность алгебраических критериев. Решение примера

Уравнение движения регулируемой системы имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 1{,}03x_2 - 0{,}03x_3 - 0{,}75\varphi(\sigma),$$
$$\dot{x}_3 = -0{,}01x_2 - 1{,}01x_3 - 0{,}25\varphi(\sigma),\ \sigma = x_2 + x_3,\ t \in [0,\infty), \tag{49}$$

а) $\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \left\{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1) / 0 \leq \varphi(\sigma)\sigma \leq \mu_0\sigma^2,\ \varphi(0) = 0\right\}$,

б) $\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \left\{\varphi(\sigma) \in \Phi_0 / \left|\varphi(\sigma)\right| \leq \varphi^*,\ 0 < \varphi^* < \infty\right\}$. (50)

Введем следующие матрицы и векторы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1{,}03 & -0{,}03 \\ 0 & -0{,}01 & -1{,}01 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}75 \\ -0{,}25 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1 \end{pmatrix},\ m = 1,\ n = 3.$$

1. Так как $SB=-1$, то SB не особая матрица. Поскольку $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\theta B = -0{,}75\theta_2 - 0{,}25\theta_3 = 0$, то $\theta_3 = -3\theta_2$. Вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2, -3\theta_2)$.

2. Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 + 1{,}04\lambda^2 + \lambda + 0{,}98 = 0,$$

где $a_0 = 1 > 0$, $a_1 = 1{,}04 > 0$, $a_2 = 1 > 0$, $a_3 = 0{,}98$, $a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0{,}06 > 0$. Следовательно, согласно критерию Гурвица, матрица A– гурвицева. Характеристическое уравнение матрицы $A + B\mu S$ имеет вид

$$\Delta_1(\lambda) = det(\lambda I_3 - A - B\mu S) = \lambda^3 + (1{,}04 + \mu)\lambda^2 + \lambda + (0{,}98 - 0{,}5\mu) = 0,$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = 1{,}04\mu$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0{,}98 - 0{,}5\mu$. Условия Гурвица: $a_i > 0$, $i = \overline{1{,}3}$, $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ выполнены при $0 \le \mu < 1{,}96$. Итак, матрица $A + B\mu S$ гурвицева при $0 \le \mu < 1{,}96$. Предельное значение $\overline{\mu}_0 = 1{,}96$.

3. Рассмотрим матричное уравнение относительно матрицы H_1:

$$A^* H_1 + H_1 A = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_4 & h_5 \\ h_3 & h_5 & h_6 \end{pmatrix}. \qquad (51)$$

Из данного уравнения следует, что элементы матрицы H_1 определяются из следующей системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2h_1 + 4h_2 = a, \\ -h_1 + 0{,}03h_2 + 0{,}01h_3 + 2h_4 = b, \\ 0{,}03h_2 + 0{,}01h_3 + 2h_5 = c, \end{cases} \qquad \begin{cases} -2h_2 + 2{,}06h_4 + 0{,}02h_5 = d, \\ -h_3 + 0{,}03h_4 + 2{,}04h_5 + 0{,}01h_6 = e, \\ 0{,}06h_5 + 2{,}02h_6 = f. \end{cases}$$

Можно показать, что верны равенства (52):

$$h_1 = 35{,}24517007355316a - 71{,}4903401471074b + 0{,}03455781292882c +$$
$$+ 69{,}4185034120909d - 0{,}714557823337642e + 0{,}0035377587f,$$
$$h_2 = 17{,}87258503677658a - 35{,}7451700735537b + 0{,}01727890646441c +$$
$$+ 34{,}70925170604545d - 0{,}357278911668821e + 0{,}00176887935f,$$
$$h_3 = -0{,}02591836735a + 0{,}0518367346997b + 1{,}0093877551073c -$$
$$- 0{,}0359183673526d - 0{,}989387755101737e - 0{,}005153569092f,$$
$$h_4 = 17{,}3546258530617a - 34{,}70925170612339b + 0{,}0119727840919c +$$
$$+ 34{,}18879252229154d - 0{,}3497278921828e + 0{,}001717856364f,$$
$$h_5 = -0{,}267959183714899a + 0{,}535918367429799b + 0{,}494693877627497c -$$
$$- 0{,}520459183753919d + 0{,}010306122449026e + 0 \cdot f,$$
$$h_6 = 0{,}0079591836747a - 0{,}0159183673494b - 0{,}0146387755329c +$$
$$+ 0{,}015459183675859d - 0{,}000306122449026e + 0{,}495051020484711f.$$

Тогда

$$2(SB)^{*-1}B^*H_1 = \left(\left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_1 \quad \left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_2 \quad \left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_3\right),$$

$$\left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_1 = 1{,}5h_2 + 0{,}5h_3 = 26{,}79591837148987a -$$
$$- 53{,}5918367429832b + 0{,}530612237250265c + 52{,}04591837539187d -$$
$$- 1{,}03061224505 4099e + 0{,}00007653447 9f, \qquad (53)$$

$$\left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_2 = 1{,}5h_4 + 0{,}5h_5 = 25{,}89795918773511a -$$
$$- 51{,}79591837547019b + 0{,}265306114951598c + 51{,}02295919156036d -$$
$$- 0{,}51530612260215e + 0{,}00257678454 6f, \qquad (54)$$

$$\left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_3 = 1{,}5h_5 + 0{,}5h_6 = -0{,}397959183734998a +$$
$$+ 0{,}795918367469998b + 0{,}734693877664599c - 0{,}772959183792949d +$$
$$+ 0{,}01530612245 1298e + 0{,}247525510242355f, \qquad (55)$$

$$\left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_2 - \left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_3 = 26{,}2959183714701a -$$
$$- 52{,}59183674294018b - 0{,}469387762713001c + 51{,}7959183753533d -$$
$$- 0{,}530612245053448e - 0{,}244948725696355f, \qquad (56)$$

Формулы (52)-(56) будут использованы при решении матричного уравнения (27). Представим матрицу H_1 в виде суммы $H_1 = H_{11} + H_{12}$, где

$$A^*H_{11} + H_{11}A = -(W + SA)^* T_3 (W + SA), \; A^*H_{12} + H_{12}A = -H_3 .$$

Заметим, что если матрица $H_2 = 0$, то матрицы $H_3 = 0$, $H = 0$.

Рассмотрим случай, когда матрица $H_2 = 0$. В этом случае $H_1 = H_{11}$. Пусть $W_1 = W + SA = (\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$. Тогда $A^*H_{11} + H_{11}A = -W_1^* T_3 W_1$, где

$$W_1^* T_3 W_1 = T_3 \begin{pmatrix} \varpi_1^2 & \varpi_1\varpi_2 & \varpi_1\varpi_2 \\ \varpi_1\varpi_2 & \varpi_2^2 & \varpi_2\varpi_3 \\ \varpi_1\varpi_3 & \varpi_2\varpi_3 & \varpi_3^2 \end{pmatrix},$$

$a = T_3\varpi_1^2$, $b = \varpi_1\varpi_2 T_3$, $c = \varpi_1\varpi_3 T_3$, $d = T_3\varpi_2^2$, $e = \varpi_2\varpi_3 T_3$, $f = T_3\varpi_3^2$.

Как следует из формул (53)-(56), для данного случая, имеем

$$\left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_1 = \left[26{,}79591837148987\varpi_1^2 - 53{,}5918367429832\varpi_1\varpi_2 +\right.$$
$$+ 0{,}530612237250265\varpi_1\varpi_3 + 52{,}04591837539187\varpi_2^2 -$$
$$\left.- 1{,}030612245054099\varpi_2\varpi_3 + 0{,}000076534479\varpi_3^2\right]T_3, \qquad (57)$$

$$\left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_2 = \left[25{,}89795918773511\varpi_1^2 - 51{,}79591837547019\varpi_1\varpi_2 +\right.$$
$$+ 0{,}265306114951598\varpi_1\varpi_3 + 51{,}02295919156036\varpi_2^2 -$$
$$\left.- 0{,}51530612260215\varpi_2\varpi_3 + 0{,}002576784546\varpi_3^2\right]T_3, \qquad (58)$$

$$\left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_2 - \left[2(SB)^{*-1}B^*H_1\right]_3 = \left[26{,}2959183714701\varpi_1^2 -\right.$$

$$- 52{,}59183674294018\varpi_1\varpi_2 - 0{,}469387762713001\varpi_1\varpi_3 +$$
$$+ 51{,}7959183753533\varpi_2^2 - 0{,}530612245053448\varpi_2\varpi_3 -$$
$$- 0{,}244948725696355\varpi_3^2 \big] T_3 . \quad (59)$$

4. Поскольку $S = (0,\ \ 1,\ \ 1)$, $SA = (-2;\ \ -1{,}04;\ \ -1{,}04)$, $(SB)^{*-1} = -1$, то из (26) имеем

$$\left[2(SB)^{*-1} B^* H_1\right]_1 + 2\varpi_1 T_3 - 2T_2 = 0 , \quad (60)$$

$$\left[2(SB)^{*-1} B^* H_1\right]_2 - (T_1 + P) + 2\varpi_2 T_3 - 1{,}04 T_2 = 0 , \quad (61)$$

$$\left[2(SB)^{*-1} B^* H_1\right]_3 - (T_1 + P) + 2\varpi_3 T_3 - 1{,}04 T_2 = 0 , \quad (62)$$

где $H_2 = 0$, $H_1 = H_{11}$. Из (61), (62) следует, что

$$\left[2(SB)^{*-1} B^* H_1\right]_2 - \left[2(SB)^{*-1} B^* H_1\right]_3 + 2(\varpi_2 - \varpi_3) T_3 = 0 . \quad (63)$$

Таким образом, величины ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, T_2, T_3 определяются из системы уравнений (60), (61), (63).

5. Ниже приведены результаты решения оптимизационной задачи

$$\mu_0 = \left[T_3 + T_2\right]^{-1} (P + T_1) \to sup$$

при условиях (60), (61), (63). Оптимизационная задача решена методом последовательных приближений.

№ п/п	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	T_2	T_3	μ_0
1	-0,5	0	2,707	$0{,}684(T_1+P)$	$0{,}274(T_1+P)$	1,044
2	-0,5	0,1	3,655	$0{,}725(T_1+P)$	$0{,}192(T_1+P)$	1,090
3	-1	0,1	8,698	$0{,}779(T_1+P)$	$0{,}062(T_1+P)$	1,188
4	-1	0,4	12,03	$0{,}777(T_1+P)$	$0{,}036(T_1+P)$	1,229
5	-1	1	19,444	$0{,}777(T_1+P)$	$0{,}016(T_1+P)$	1,263
6	-1	2	32,484	$0{,}776(T_1+P)$	$0{,}006(T_1+P)$	1,279
7	-1	3	45,777	$0{,}775(T_1+P)$	$0{,}003(T_1+P)$	1,285

Для сравнения, рассмотрим решение данной задачи частотным критерием В. М. Попова. Передаточная функция линейной части системы $(\sigma + W(p)\varphi) = 0$ имеет вид

$$W(p) = S(A - pI_3)^{-1} B = \frac{p^2 - 0{,}5}{p^3 + 1{,}04p^2 + p + 0{,}98} .$$

Значение μ_0 определяется из условия

$$\mu_0^{-1} + Re(1 + i\omega q)W(i\omega) > 0 ,\ \ -\infty < \omega < +\infty .$$

Для выполнения частотного критерия необходимо и достаточно, чтобы полином

$$\Delta(\lambda) = (q + \mu_0^{-1})\lambda^3 + (-0{,}9184\mu_0^{-1} - 0{,}5q + 1{,}04)\lambda^2 +$$
$$+(-1{,}0384\mu_0^{-1} - 0{,}5q - 0{,}46)\lambda + (0{,}9604\mu_0^{-1} - 0{,}49) > 0, \ \forall\lambda, \ 0 \le \lambda < \infty.$$

Тогда предельное значение $\mu_0^{-1} = -q$ и должно выполняться

$$(1{,}04 + 0{,}4184q)\lambda^2 + (0{,}5384q - 0{,}46)\lambda + (-0{,}9604q - 0{,}49) > 0, \ 0 \le \lambda < \infty.$$

Получаем, что $q = -0{,}806451613$, предельное значение $\mu_0 = 1{,}24$.

Итак, согласно критерию В. М. Попова, тривиальное решение системы (49), (50) абсолютно устойчиво при $0 \le \mu_0 < 1{,}24$.

Как видно из таблицы, при $H_2 = 0$, значение $\mu_0 = 1{,}285$, т. е. даже частный случай теоремы 1 дает значение μ_0 большее, чем может дать критерий В. М. Попова.

Библиографические ссылки

1. *Айсагалиев С. А.* Теория регулируемых систем. Алма-Ата, 2000.

2. *Айсагалиев С. А.* К теории регулируемых и фазовых систем // АН СССР, Автоматика и телемеханика. 1987. № 5.

3. *Айсагалиев С. А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Известия АН СССР, Техническая кибернетика. 1969. № 5.

4. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории регулируемых систем. М.; Л., 1951.

5. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.