ВЕСТНИК ТОГУ. 2008. № 4 (11)

УДК 519.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТВЕГА-ДЕ ВРИЗА-БЮРГЕРСА СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. II

Подгаев А. Г. – д - р физ. мат. наук, доц. завкафедрой «Высшая математика», тел. (4212) 22-44-23, e-mail: podgaev@mail.ru (ТОГУ)

Продолжается исследование начально-краевой задачи в ограниченной области, начатое в работе [1] для двух случаев уравнения Кортвега-де Вриза – Бюргерса с нелинейным членом второго порядка и без него. В части [1] даны введение в проблематику, библиографические ссылки, формулировки утверждений и приведено обоснование равномерных оценок вторых производных приближенного решения. Здесь будут выведены оценки с третьими производными и производными по времени. Также показано, как из них получаются утверждения теорем о существовании регулярного решения глобально по времени для случая уравнения, содержащего член со второй производной. Если уравнение не содержит этого члена, такое решение построено локально по времени и указан интервал существования, а также на заданном интервале, но при достаточной малости начальной функции. В дальнейшем будет представлено обоснование наличия слабых решений.

The initial boundary value problem for two cases for the Kortewege-de Vries equation is considered. In the first case the equation contains the second order nonlinear term (case a)) and in the second case it does not (case b)). The estimates for the third order and time derivatives for the approximate solution are found. It is shown how from them the conclusions of the theorems about the existence of a regular solution globally in time is derived for the case a. Such a solution locally in time is found for the equation with no the second derivative term and the existence range is given.

Ключевые слова: регулярное решение, краевые условия, разрешимость, предельный переход, уравнение Кортвега-де Вриза-Бюргерса.

Как и в [1], изучается уравнение

$$Lu = u_t + uu_x + \nu u_{xxx} - \alpha\left(u_x^2 + \mu u_{xx}^2 - 1\right)u_{xx} = 0, \qquad (1)$$

$$\nu > 0, \quad \alpha \ge 0, \quad \mu \ge 0,$$

обращающееся при $\alpha = 0$ в уравнение Котвега-де Вриза. При $v = 0$, $\mu = 0$ оно является обобщением уравнения Бюргерса на случай, когда коэффициент вязкости зависит от градиента скорости. В (1) этот коэффициент не только допускает вырождение, но и меняет знак. Мы доказываем, что для уравнения (1) в области Q=(0,T)×(0,1) корректна следующая краевая задача:

$$u(x,0) = u_0(x);\ u_x(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(1,t) + \beta u_x(1,t) = 0. \qquad (2)$$

Рассмотрен случай, когда $u_0 \in W_2^2(0,1)$, $u_0(0,1) = u_{0x}(0) = 0$. Случай, когда $u_0 \in W_2^1(0,1)$, $u_0(1) = 0$ (существование слабых решений), будет рассмотрен в дальнейших работах. При условиях, указанных в [1], на коэффициенты α, v, μ, β будут доказаны теоремы существования и единственности.

Вывод второй равномерной оценки

В пункте 1 работы [1] мы видели, что базисные функции $\varphi^i \in C^\infty[0,1]$ и удовлетворяют условиям

$$\varphi_x^i(0) = \varphi^i(1) = \varphi_{xx}^i(1) + \beta\varphi_x^i(1) = 0.$$

Тогда из формулы

$$\varphi^i(x) = \int_1^x v^i(\varepsilon)d\varepsilon = -\frac{1}{\lambda^i}D(\ell^{\beta x}v^i) = -\frac{1}{\lambda^i}D(\ell^{\beta x}(D\varphi^i))$$

дифференцированием выводим, что $\varphi_{xxx}^i(0) + 2\beta\varphi_{xx}^i(0) = 0$, и поэтому такому же условию удовлетворяет $u^n(x,t)$:

$$u_{xxx}(0,t) + 2\beta u_{xxx}(0,t) = 0. \qquad (3)$$

Приближенное решение задачи мы искали в виде $u^n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^n(t)\varphi^i(x)$ (для удобства иногда индекс ставим снизу), где $c_i^n(t)$ определялись из системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\int_0^1 L(u^n)\varphi^i(x)dx = 0,\ i = 1,2...,n,\ c_i^n(0) = c_i, \qquad (4)$$

$$c_i = \lambda_i(u_0,\varphi^i)_{L_2} = (u_{0x},v^i)_{L_{2,\beta}},\ u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi^i(x).$$

Умножим уравнение (4) на $\lambda_i^2 c_i$ и просуммируем по i от 1 до n. Получим

$$\int_0^1 L(u^n) D(\ell^{\beta x} D^2(\ell^{\beta x} u_x^n)) dx = 0.$$

Член с u_t с учетом условий (3) даст величину (индекс n далее опущен)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left|D(\ell^{\beta x} u_x)\right|^2 dx.$$

Сосчитаем вклад, который даст третья производная в операторе L:

$$(\ell^{\beta x} u_{xxx}, (D^3 \ell^{\beta x} u_x + \beta D^2 \ell^{\beta x} u_x)) =$$

$$= (\ell^{2\beta x} u_{xxx}, u_{xxxx} + 4\beta u_{xxx} + 5\beta^2 u_{xx} + 2\beta^3 u_x) =$$

$$= 3\beta(\ell^{2\beta x}, u_{xxx}^2) - 7\beta^3(\ell^{2\beta x}, u_{xx}^2) - 4\beta^4(\ell^{2\beta x}, u_x u_{xx}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\ell^{2\beta x} u_{xx}^2\Big|_0^1 + \frac{5\beta^2}{2}\ell^{2\beta x} u_{xx}^2\Big|_0^1 + 2\beta^3 \ell^{2\beta x} u_x u_{xx}\Big|_0^1 =$$

$$= 3\beta(\ell^{2\beta x}, u_{xxx}^2) + 4\beta^5(\ell^{2\beta x}, u_x^2) + \frac{1}{2}\ell^{2\beta} u_{xxx}^2(1,t) +$$

$$+ \frac{5\beta^2}{2}\ell^{2\beta} u_{xx}^2(1,t) - \frac{9}{2} u_{xx}^2(0,t) -$$

$$- 7\beta^3(\ell^{2\beta x}, u_{xx}^2) - 4\beta^4 \ell^{2\beta} u_x^2(1,t).$$

В последнем равенстве мы воспользовались условиями

$$u_x(0,t) = 0, u_{xx}(1,t) = -\beta u_x(1,t), u_{xxx}(0,t) = -2\beta u_{xx}(0,t).$$

Рассмотрим члены, связанные со вторыми производными:

$$A = -((u_x^2 + \mu u_{xx}^2 - 1) u_{xx}, D(\ell^{\beta x} D^2(\ell^{\beta x} u_x))) =$$

$$= ((u_x^2 + \mu u_{xx}^2 - 1)u_{xxx}, \ell^{\beta x} D^2(\ell^{\beta x} u_x)) +$$
$$+ 2(u_x u_{xx}^2, \ell^{\beta x} D^2(\ell^{\beta x} u_x)) +$$
$$+ 2\mu(\ell^{2\beta x} u_{xx}^2 u_{xxx}, (u_{xxx} + 2\beta u_{xx} + \beta^2 u_x)) -$$
$$- \mu u_{xx}^3 \ell^{2\beta x}(u_{xxx} + 2\beta u_{xx} + \beta^2 u_x)\Big|_0^1 - (u_x^2 - 1)u_{xx} \ell^{\beta x} D^2(\ell^{\beta x} u_x)\Big|_0^1 =$$
$$= A_1 + A_2 + A_3 + A_\Gamma.$$

Граничные члены при $x = 0$ исчезнут. При $x = 1$ используем равенство $u_{xx} + \beta u_x = 0$. Тогда, начиная с граничных членов, получим

$$A_\Gamma = \beta^3 \ell^{2\beta} u_x^2(1,t) - \beta^3 \ell^{2\beta} u_x^4(1,t) +$$
$$+ \beta \ell^{2\beta} u_x(1,t)(u_x^2(1,t) - 1)u_{xxx}(1,t) +$$
$$+ \mu \beta^3 u_x^3(1,t) \ell^{2\beta}(u_{xxx}(1,t) - \beta^2 u_x(1,t)).$$

Преобразуем $A_1 + A_3$:

$$A_1 + A_3 = (\ell^{2\beta x} u_x^2, u_{xxx}^2) - (\ell^{2\beta x}, u_{xxx}^2) - 2\beta(\ell^{2\beta x} u_x, u_{xx}^3) -$$
$$- 2\beta^2(\ell^{2\beta x}(u_x^2 - 1), u_{xx}^2) - \beta^2(\ell^{2\beta x}(3u_x^2 - 1), u_{xx}^2) +$$
$$+ 4\beta^4(\ell^{2\beta x}, (\frac{u_x^4}{4} - \frac{u_x^2}{2}) + \mu(\ell^{2\beta x} u_{xx}^2, u_{xxx}^2) +$$
$$+ 6\beta\mu(\ell^{2\beta x} u_{xx}^3, u_{xxx}) + 3\beta^2 \mu(\ell^{2\beta x} u_{xx}^2 u_x, u_{xxx}) +$$
$$+ \beta \ell^{2\beta x}(u_x^2 - 1)u_{xx}^2\Big|_0^1 + \beta^2 \ell^{2\beta x}(u_x^2 - 1)u_x u_{xx}\Big|_0^1 -$$
$$- 2\beta^3 \ell^{2\beta x}\left(\frac{u_x^4}{4} - \frac{u_x^2}{2}\right)\Big\|_0^1 =$$
$$= (\ell^{2\beta x} u_x^2, u_{xxx}^2) + 3\beta^2(\ell^{2\beta x}, u_{xx}^2) + \mu(\ell^{2\beta x} u_{xx}^2, u_{xxx}^2) +$$
$$+ \beta^4(\ell^{2\beta x}, u_x^4) + \beta u_{xx}^2(0,t) + \beta^3 \ell^{2\beta} u_x^2(1,t) -$$
$$- (\ell^{2\beta x}, u_{xxx}^2) - 2\beta(\ell^{2\beta x} u_x, u_{xx}^3) - 5\beta^2(u_x^2, u_{xx}^2 \ell^{2\beta x}) -$$
$$- 2\beta^4(\ell^{2\beta x}, u_x^2) - \frac{\beta^3}{2}\ell^{2\beta} u_x^4(1,t) +$$
$$+ 6\beta\mu(\ell^{2\beta x} u_{xx}^3, u_{xxx}) + 3\beta^3 \mu(\ell^{2\beta x} u_{xx}^2 u_x, u_{xxx}).$$

Преобразуем A_2:

$$A_2 = 2\beta^2(\ell^{2\beta x}u_x^2, u_{xx}^2) - \frac{2}{3}(\ell^{2\beta x}, u_{xx}^4) +$$

$$+\frac{8\beta}{3}(\ell^{2\beta x}, u_x u_{xx}^3) - \frac{2}{3}\beta^3\ell^{2\beta}u_x^4(1,t).$$

Складывая все три выражения, получим, группируя сначала положительные члены:

$$A = (\ell^{2\beta x}u_x^2, u_{xxx}^2) + 3\beta^2(\ell^{2\beta x}, u_{xx}^2) + \mu(\ell^{2\beta x}u_{xx}^2, u_{xxx}^2) +$$

$$+\beta^4(\ell^{2\beta x}, u_x^4) + 2\beta^2(\ell^{2\beta x}u_x^2, u_{xx}^2) + \beta u_{xx}^2(0,t) +$$

$$+2\beta^3\ell^{2\beta}u_x^2(1,t) - (\ell^{2\beta x}, u_{xxx}^2) + \frac{2\beta}{3}(\ell^{2\beta x}u_x, u_{xx}^3) -$$

$$-5\beta^2(u_x^2, u_{xx}^2\ell^{2\beta x}) - 2\beta^4(\ell^{2\beta x}, u_x^2) - \frac{\beta^3}{2}\ell^{2\beta}u_x^4(1,t) +$$

$$+6\beta\mu(\ell^{2\beta x}u_{xx}^3, u_{xxx}) + 3\beta^2\mu(\ell^{2\beta x}u_{xx}^2 u_x, u_{xxx}) +$$

$$+\mu\beta^3 u_x^3(1,t)\ell^{2\beta}(u_{xxx}(1,t) - \beta^2 u_x(1,t)) -$$

$$-\frac{2}{3}(\ell^{2\beta x}, u_{xx}^4) - \frac{5}{3}\beta^3\ell^{2\beta}u_x^4(1,t) +$$

$$+2\beta\ell^{2\beta}u_x(1,t)(u_x^2(1,t) - 1)u_{xxx}(1,t).$$

Конвективный член даст

$$(uu_x, D(\ell^{\beta x}D^2(\ell^{\beta x}u_x))) = -(\ell^{\beta x}(u_x^2 + uu_{xx}), D^2\ell^{\beta x}u_x).$$

Умножая соответствующие суммы на ν и α и суммируя все выражения, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left|D(\ell^{\beta x}u_x)\right|^2 dx + (3\beta\nu - \alpha)(\ell^{2\beta x}, u_{xxx}^2) +$$

$$+\alpha\mu(\ell^{2\beta x}u_{xx}^2, u_{xxx}^2) + \alpha(\ell^{2\beta x}u_x^2, u_{xxx}^2) + 2\beta^2\alpha(\ell^{2\beta x}u_x^2, u_{xx}^2) +$$

$$+\beta^4\alpha(\ell^{2\beta x},u_x^4)+3\beta^2\alpha(\ell^{2\beta x},u_{xx}^2)+\beta\alpha u_{xx}^2(0,t)+2\beta^3\alpha\ell^{2\beta}u_x^2(1,t)+$$

$$+4\nu\beta^5(\ell^{2\beta x},u_x^2)+\frac{\nu}{2}\ell^{2\beta}u_{xxx}^2(1,t)+\frac{5\beta^2}{2}\nu\ell^{2\beta}u_{xx}^2(1,t)=$$

$$=-\frac{2}{3}\beta\alpha(\ell^{2\beta x}u_x,u_{xx}^3)+5\beta^2\alpha(u_x^2\ell^{2\beta x},u_{xx}^2)+2\beta^4\alpha(\ell^{2\beta x},u_x^2)+$$

$$+\frac{13\beta^3}{6}\alpha u_x^4(1,t)-6\beta\mu\alpha(\ell^{2\beta x}u_{xx}^3,u_{xxx})-3\beta^2\mu\alpha(\ell^{2\beta x}u_{xx}^2u_x,u_{xxx})-$$

$$-\mu\beta^3\alpha u_x^3(1,t)\ell^{2\beta}(u_{xxx}(1,t)-\beta^2u_x(1,t))+\frac{2}{3}\alpha(\ell^{2\beta x},u_{xx}^4)- \qquad (5)$$

$$-2\beta\alpha\ell^{\beta}u_x(1,t)(u_x^2(1,t)-1)u_{xxx}(1,t)+\frac{9}{2}\nu u_{xx}^2(0,t)+$$

$$+7\beta^3\nu(\ell^{2\beta x},u_{xx}^2)+4\beta^4\nu\ell^{2\beta}u_x^2(1,t)+$$

$$+(\ell^{2\beta x}(u_x^2+uu_{xx}),u_{xxx}+2\beta u_{xx}+\beta^2u_x).$$

Напомним, что в силу условий (13) из [1] (они использовались там при выводе оценок вторых производных) на параметры задачи:

$$\frac{3}{2}\beta\nu>\alpha>0,\ \mu>0;\ и\ 2+\beta>\ell^{\beta}+\frac{\mu\beta\lambda}{2},\ \beta<2\lambda \text{ для некоторого } \lambda>0, \qquad (6)$$

получим для коэффициента при втором слагаемом в (5)

$$3\beta\nu-\alpha>\frac{3}{2}\beta\nu>0.$$

Напомним также неравенства (14) и (16) и (17) из [1]:

$$\int_0^1\ell^{\beta x}u_x^2dx+\int_Q(\alpha u_{xx}^2u_x^2+\nu u_{xx}^2+\mu\alpha u_{xx}^4)dQ+\int_0^T\big[\nu u_{xx}^2(1,t)+$$

$$+\nu u_{xx}^2(0,t)+\alpha u_x^4(1,t)+u_x^2(1,t)\big]dt\le c,\ \alpha>0, \qquad (7)$$

$$\int_0^1\ell^{\beta x}u_x^2dx+\nu\int_Q\ell^{\beta x}u_{xx}^2dQ+\nu\int_0^T\big[u_{xx}^2(1,t)+u_{xx}^2(0,t)\big]dt\le c \qquad (8)$$

$$|u|\le c,\quad \int_0^1u_x^2dx\le c,\quad \int_Q u_{xx}^2dQ\le c, \qquad (9)$$

где c не зависит от n и α.

Далее, с помощью неравенства Коши с δ будем оценивать те члены правой части (5), которые еще не присутствуют в оценках (7)–(9) (это 1, 5, 6, 7, 9 и 13 слагаемые). При этом, мы будем опускать несущественные мультипликативные постоянные. Имеем

$$2\alpha\left|\left(\ell^{2\beta x}u_x, u_{xx}^3\right)\right| \le \alpha\int_0^1 \ell^{2\beta x}u_x^2u_{xx}^2dx + \alpha\int_0^1 \ell^{2\beta x}u_{xx}^4dx.$$

Здесь уже правую часть (после интегрирования по t) можно оценить через (7). Далее,

$$2\mu\left|\left(\ell^{2\beta x}u_{xx}^3, u_{xxx}\right)\right| \le c(\delta)\mu\int_0^1 \ell^{2\beta x}u_{xx}^4dx + \delta\mu\int_0^1 \ell^{2\beta x}u_{xx}^2u_{xxx}^2dx.$$

$$2\mu\left|\left(\ell^{2\beta x}u_{xx}^2u_x, u_{xxx}\right)\right| \le \mu c(\delta)\int_0^1 \ell^{2\beta x}u_x^2u_{xx}^2dx + \mu\int_0^1 \ell^{2\beta x}u_{xx}^2u_{xxx}^2dx.$$

$$\left|\mu u_x^3(1,t)u_{xxx}(1,t)\right| = \mu\left|u_{xxx}(1,t)\right|\left|\int_0^1 3u_x^2u_{xx}dx\right| \le$$

$$\le 3\mu\left(\int_0^1 u_x^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 u_x^2u_{xx}^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left|u_{xxx}(1,t)\right| \le$$

$$\le \delta\mu\left|u_{xxx}(1,t)\right|^2 + c(\delta)\mu\int_0^1 u_x^2u_{xx}^2dx.$$

Мы воспользовались оценкой $\int_0^1 u_x^2dx \le c$ *из* (7).

$$\left|u_x(1,t)u_{xxx}(1,t)\right| \le \delta\left|u_{xxx}\right|^2 + c(\delta)u_x^2(1,t).$$

$$2\left|\left(\ell^{2\beta x}u_x^2, u_{xxx}\right)\right| \le c(\delta)\int_0^1 \ell^{2\beta x}u_x^2dx + \delta\int_0^1 \ell^{2\beta x}u_x^2u_{xxx}^2dx \le$$

$$\le \delta\int_0^1 \ell^{2\beta x}u_x^2u_{xxx}^2dx + c.$$

$$\left|\left(\ell^{2\beta x}uu_{xx}, u_{xxx}\right)\right| \le c\int\left|u_{xx}u_{xxx}\right|\ell^{2\beta x}dx \le$$

$$\le \delta \int_0^1 u_{xx}^2 u_{xxx}^2 \ell^{2\beta x} dx + c(\delta).$$

Здесь мы опять использовали оценку $|u| \le c$. Остальные члены оценены в неравенстве (7). Таким образом, интегрируя (5) по t от нуля до t, при достаточно малых δ получим для всех $t \in [0, T]$ оценку

$$\int_0^1 \left| D\left(\ell^{2\beta x} u_x\right)\right|^2 dx + \int_{Q_t} \ell^{2\beta x} \Big[u_{xxx}^2 + \frac{\alpha}{2}\Big(u_{xx}^2 u_{xxx}^2 + u_x^2 u_{xxx}^2 +$$

$$+ u_x^2 u_{xx}^2 + u_x^4 \Big) + u_{xx}^2 \Big] dQ_t + \int_0^t u_{xxx}^2 (1,\tau) d\tau \le \tag{10}$$

$$\le \int_0^1 \left| D\left(\ell^{2\beta x} u_{0x}^n\right)\right|^2 dx + c(\delta) \le c, \; Q_t = (0,t)\times(0,1),$$

где c не зависит от n. Здесь использованы условия $u_0 \in W_2^2(0,1)$ è $u_0(1) = u_{0x}(0)$, из которых в п.1 из [1] выведена оценка $\|u_0^n\|_{W_2^2} \le c$ с c не зависящим от n.

Из (10) в свою очередь следует, что

$$|u_x| = \left|\int_0^x u_{xx} dx\right| \le \left(\int_0^1 u_{xx}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le c,$$

$$u_{xx}^6 = \left[3\int_1^x u_{xx}^2 u_{xxx} dx - \beta^3 u_x^3 (1,t)\right]^2 \le$$

$$\le \left[3\left(\int_0^1 u_{xx}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 u_{xx}^2 u_{xxx}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + c\right]^2 \le \tag{11}$$

$$\leq c\left(\int_0^1 u_{xx}^2 u_{xxx}^2 dx + 1\right),$$

$$\int_0^T \int_0^1 u_{xx}^6 dxdt \leq c,$$

где c не зависит от n.

Заметим, что при $\alpha = 0$ в (10) сохранятся члены второго порядка однородности, а в (11) останется справедливой первая оценка.

Из (10), (11) следует, что каждый член в $L[u]$, кроме, пока, u_t принадлежит $L_2(0,T;L_2(0,1))$ и равномерно ограничен в норме этого пространства.

Вывод равномерной оценки производной по *t*

Вернемся к интегральному тождеству (4). Напомним, что

$$\left(\varphi_i, \varphi_j\right)_{L_2} = \frac{1}{\lambda_j}\delta_j^i.$$

Введем $\widetilde{\varphi}_i = \sqrt{\lambda_i}\varphi_i$. Тогда $\left(\widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\varphi}_j\right)_{L_2} = \delta_j^i$, а уравнение (4) можно записать в виде

$$\int_0^1 L\left(u^n\right)\widetilde{\varphi}_i dx = 0. \ \ i = 1,2....,n. \tag{12}$$

В пункте 1 из [1] мы видели, что любую функцию из $L_2(0,1)$ можно разложить в ряд Фурье по $\widetilde{\varphi}_i$. Пусть P_n – ортогональный проектор в $L_2(0,1)$ на линейную оболочку $\{\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2...., \widetilde{\varphi}_n\}$:

$$P_n h = \sum_{i=1}^n a_i \widetilde{\varphi}_i,$$

$$a_i = \left(h, \widetilde{\varphi}_i\right), \ \ h = \sum_{i=1}^\infty a_i \widetilde{\varphi}_i.$$

Тогда неравенство Бесселя и равенство Парсеваля-Стеклова дают:

$$\|P_n h\|_0^2 = \sum_{i=1}^n \left(h, \widetilde{\varphi}_i\right)^2 \|\widetilde{\varphi}_i\|_0^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^\infty a_i^2 = \|h\|_0^2.$$

Следовательно, норма оператора $P_n : L_2 \to L_2$ равна единице:

$$\left\| P_n \right\|_2 = 1. \tag{13}$$

Равенство (12) означает, что $Lu^n = \sum_{k>n} b_k \widetilde{\varphi}_k, \quad b_k = \left(Lu^n, \widetilde{\varphi}_k\right)$, то есть $P_n\left(Lu^n\right) = 0$. Очевидно, что $P_n\left(u_t^n\right) = u_t^n$ и из линейности P_n имеем

$$u_t^n = P_n\left[-\nu u_{xxx}^n + \alpha\left(u_{nx}^2 + \mu u_{nxx}^2 - 1\right)u_{nxx} - u_n u_{nx}\right]. \tag{14}$$

Тогда из (13) и (14) выводим

$$\left\| u_t^n \right\|_{L_2(Q)}^2 \le \int_0^T \left\| P_n \right\|_{L_2 \to L_2}^2 \left\| \nu u_{xxx}^n - \right.$$

$$\left. - \alpha\left(u_{nx}^2 + \mu u_{nxx}^2 - 1\right)u_{nxx} + u_n u_{nx} \right\|_{L_2(0,1)}^2 dt \le c, \tag{15}$$

где с не зависит от n.

Здесь мы воспользовались оценками (10) и (11).

Переход к пределу при $n \to \infty$. Окончание доказательства теорем о регулярных решениях

Умножим тождество (12) на произвольную функцию $h_i(t)$ из $L_2(0,T)$, просуммируем по i от 1 до некоторого $N \le n$. Проинтегрируем полученное тождество по t от нуля до T (или до t^* при $\alpha = 0$). Получим, что для всех $N \le n$ выполнено тождество

$$\int_Q \left[u_t^n + \nu u_{xxx}^n - \alpha\left(u_{nx}^2 + \mu u_{nxx}^2 - 1\right)u_{nxx} + u_n u_{nx}\right] h^N(x,t)\,dx\,dt = 0, \text{ где } h^N = \sum_{i=1}^N h_i(t)\widetilde{\varphi}_i(x). \tag{16}$$

Из (10), (15) следует равномерная ограниченность u^n в норме $W_2^1(Q)$. Поэтому множество $\{u^n\}$ относительно компактно в $L_2(0,T;L_2(0,1))$. Возьмем в теореме 1 из [2] $B_1 = L_2$, $B = W_2^2$, S – шар в $W_2^3(0,1)$, $p = p_1 = 2$. Из оценок (10), (11), (15) и этой теоремы следует сходимость по норме $L_2(0,T;W_2^2(0,1))$ некоторой подпоследовательности последовательности u^n, которую обозначим опять u^n, при $n \to \infty$ к функции $u \in L_2(0,T;W_2^3(0,1))$, а также сходимость u_t^n к u_t слабо в $L_2(Q)$ и u_{xxx}^n к u_{xxx} слабо в $L_2(Q)$ при $n \to \infty$. И поэтому также поточечная сходимость $\mu(u_{xx}^n)^3$ к μu_{xx}^3, а $u^n u_x^n$ к

uu_x. А поскольку, см. (11), $\alpha\left\|(u_{xx}^n)^3\right\|_{L_2(Q)} \le c$, и $|uu_x| \le c$, то отсюда следует (Лемма 1.3 из [3; с. 25] или Лемма 3.2 из [4; с. 80]) слабая сходимость в $L_2(Q)$ $(u_{xx}^n)^3$ к u_{xx}^3 и $u^n u_x^n$ к uu_x.

Следовательно, в интегральном тождестве (16) при фиксированной функции h^N и любом конечном N можно перейти к пределу при $n \to \infty$.

После этого можно осуществить предельный переход по $N \to \infty$, и, так как функции вида $h^N = \sum_{i=1}^{N} h_i(t)\widetilde{\varphi}_i(x)$ плотны в $L_2(Q)$, получим тождество

$$\int_Q LuhdQ = 0 \ \forall h \in L_2(Q). \tag{17}$$

Отсюда следует, что уравнение (1) удовлетворяется почти всюду и в смысле обобщенных функций. Выполнение краевых условий $u(1) = 0$ и $u_x(0) = 0$ следует из сходимости u^n к u в норме $L_2(0,T;W_2^2(0,1))$, сохраняющей эти значения для предельных элементов.

Из представления

$$0 = u_{xx}^n(1,t) + \beta u_x^n(1,t) = \int_x^1 (u_{xxx}^n(\xi,t) + \beta u_{xx}^n(\xi,t))d\xi +$$

$$+ u_{xx}^n(x,t) + \beta u_x^n(x,t)$$

и слабой сходимости $u_{xxx}^n + \beta u_{xx}^n$ к $u_{xxx} + \beta u_{xx}$ *в* $L_2(Q)$ выводим, что

$$-\int_x^1 (u_{xxx} + \beta u_{xx})d\xi = u_{xx}(x,t) + \beta u_x(x,t). \tag{18}$$

Из того, что $u_{xxx} \in L_2(Q)$ следует, что $u_{xxx} \in C([0,1];L_2(0,T))$ (Лемма 1.2 из [3], с. 20). Поэтому u_{xx} имеет след при $x = 1$ и из (18) следует, что $u_{xx}(1,t) + \beta u_x(1,t) = 0$.

Выполнение начального условия аналогично следует из слабой сходимости u_t^n к u_t в $L_2(Q)$, представления

$$u^n(x,t) = \int_0^t u_t^n(x,\tau)d\tau + u^n(x,0)$$

и сходимости $u^n(x,0)=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)$ к $u_0(x)$ в $L_2(0,l)$, поскольку по тем же соображениям $u \in C([0,T];L_2(0,l))$.

Теперь нетрудно установить, что краевые и начальные условия удовлетворяются также в следующем смысле:

$$\|u_{xx}(x,t)+\beta u_x(x,t)\|_{L_2(0,T)} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \to l,$$

$$\|u(x,t)-u_0(x)\|_{L_2(0,l)} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Теоремы 1–3 (формулировки даны в [1]) доказаны.

Библиографические ссылки

1. *Подгаев А. Г.* Краевая задача для уравнения Кортвега-де Вриза-Бюргерса со знакопеременным коэффициентом. I // Вестник ТОГУ. 2007. № 4(7).

2. *Подгаев А. Г.* Компактность некоторых нелинейных множеств // Доклады АН СССР. 1985. Т. 285. № 5.

3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

4. *Lions J. L.* Quelques methodes de resolution les problemes aux limites non linearies. Paris, 1969.

5. *Ладыженская О. А., Уральская Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.