ВЕСТНИК ТОГУ. 2008. № 4 (11)

УДК 517.988.8

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ[1]

Суэтина Ю. О. – магистр кафедры «Прикладная математика», e-mail: Sky J87@mail.ru (ТОГУ)

Исследуется краевая задача для уравнения конвекции-диффузии-реакции. Доказывается существование сильного решения, обосновывается сходимость метода Галеркина, приводятся численные примеры расчета концентрации загрязняющего вещества в зависимости от функции распада.

The boundary value problem for the convection-diffusion-reaction equation is investigated. The existence of a strong solution is proved, the convergence of Galerkin's method is justified, and calculation results of the pollutant concentration versus disintegration function are provided.

Ключевые слова: уравнение конвекции-диффузии-реакции, краевая задача, приближенное решение, метод Галеркина, ортопроектор.

Важнейшей задачей прикладной экологии является защита окружающей среды от антропогенных загрязнений. Применение метода математического моделирования к исследованию процессов распространения загрязняющих веществ в природных водоемах или в атмосфере приводит к необходимости решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих распространение загрязнений в рассматриваемых областях. Параметры, входящие в уравнение переноса загрязнений и граничные условия, являются важными характеристиками распространения примеси, поэтому решение указанных задач играет большую роль в прикладной экологии.

Данная работа посвящена теоретическому исследованию краевой задачи для двумерного стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции, описывающего концентрацию загрязняющего вещества в ограниченной области на плоскости. Исследуется разрешимость и единственность решения поставленной задачи, зависимость ее решения от функции распада загрязняющего вещества за счет химических реакций. Рассматривается решение

[1] Статья написана под научным руководством д - р физ. - мат. наук, проф. Зарубина А. Г.

уравнения конвекции-диффузии-реакции с помощью метода Галеркина и доказывается сходимость этого метода применительно к рассматриваемой задаче.

1. Постановка задачи и теорема существования

Пусть Ω – выпуклый, ограниченный многоугольник в пространстве R^2. Рассмотрим краевую задачу нахождения концентрации φ загрязняющего вещества [1]

$$-\lambda\Delta\varphi + \mathbf{u}\nabla\varphi + \kappa\varphi = f, \tag{1.1}$$

$$\varphi(x,y)\big|_{\Gamma} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $\lambda = const > 0$ – коэффициент диффузии, **u** = (u, v) – вектор скорости, κ – функция, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, f – плотность объемных источников.

В дальнейшем нам потребуются функциональные пространства, определения и основные свойства которых можно найти в [2]. Это пространство Лебега $L_p(\Omega),\ p \ge 1$ и пространства С. Л. Соболева $W_p^l(\Omega)$. Обозначим через $C^+(\overline{\Omega})$ множество непрерывных неотрицательных функций, определенных в $\overline{\Omega}$, $J(\Omega)$ – множество соленоидальных функций из пространства $W_2^1(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,y)\in L_2(\Omega)$, $\kappa(x,y)\in C^+(\overline{\Omega})$, $\mathbf{u}\in J(\Omega)$. *Тогда задача (1.1) – (1.2) имеет решение* $\varphi(x,y)$ *из пространства* $W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, *и оно единственно.*

Доказательство. Данную теорему докажем с использованием альтернативы Фредгольма.

Введем оператор $C\psi : W_2^2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ по формуле

$$C\psi = (\mathbf{u}, \nabla\psi) + \kappa\psi. \tag{1.3}$$

Здесь $\psi \in W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega).$

Уравнение (1.1) перепишется следующим образом:

$$-\Delta\varphi + \frac{1}{\lambda}C\varphi = \frac{1}{\lambda}f. \tag{1.4}$$

Оператор C является линейным вполне непрерывным оператором из $W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\to L_2(\Omega)$, что немедленно следует из теорем вложения [2].

Оператор $-\Delta$ имеет обратный ограниченный [3]

$$(-\Delta)^{-1}: L_2(\Omega) \to W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Обозначим $\psi = -\Delta\varphi$. Уравнение (1.4) эквивалентно уравнению

$$\psi + \frac{1}{\lambda} C\left((-\Delta)^{-1}\psi\right) = \frac{1}{\lambda} f \tag{1.5}$$

в пространстве $L_2(\Omega)$ с вполне непрерывным оператором $C(-\Delta)^{-1}$.

Однородное уравнение (1.5) равносильно краевой задаче

$$-\Delta\varphi + \frac{1}{\lambda}((\mathbf{u}, \nabla\varphi) + \kappa\varphi) = 0, \tag{1.6}$$

$$\varphi(x, y)\big|_{\Gamma} = 0.$$

Умножим уравнение (1.6) скалярно на φ в $L_2(\Omega)$, тогда в силу принадлежности κ множеству $C^{+}(\overline{\Omega})$ и $\mathbf{u}$ – множеству $J(\Omega)$ получим:

$$\|\nabla\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} \le 0.$$

Отсюда следует, что $\varphi(x, y) = 0$. Таким образом, по альтернативе Фредгольма [4] задача (1.1) – (1.2) имеет решение $\varphi(x, y) \in W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, решение единственно. Теорема доказана.

Каждому $\kappa(x, y) \in C^{+}(\overline{\Omega})$ ставится в соответствие единственное $\varphi(x, y) \in W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, поэтому определен оператор $A: C^{+}(\Omega) \to W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $A\kappa = \varphi$. Оператор A не является линейным и, как будет установлено ниже, удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых* $\kappa_1, \kappa_2 \in C^{+}(\Omega)$ *справедлива следующая оценка:*

$$\|A\kappa_1 - A\kappa_2\|_{L_2(\Omega)} \le C_1 \|\kappa_1 - \kappa_2\|_{C(\Omega)},$$

где $C_1 = \dfrac{4}{\lambda^2} \|f\|_{L_2(\Omega)}$.

Доказательство. Для заданных κ_1 и κ_2 задача (1.1) – (1.2) имеет решения φ_1 и φ_2, тогда для разности $\varphi_1 - \varphi_2$ будет верно тождество

$$-(\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)) + \frac{1}{\lambda}(\mathbf{u}, \nabla(\varphi_1 - \varphi_2)) + \frac{1}{\lambda}\left(\kappa_1\varphi_1 - \kappa_2\varphi_2\right) = 0.$$

Умножим полученное равенство на $\varphi_1 - \varphi_2$ скалярно в $L_2(\Omega)$, получим

$$\left\|\nabla(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{1}{\lambda}\left\|\kappa_1-\kappa_2\right\|_{C(\bar{\Omega})}\left\|\varphi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\varphi_2-\varphi_1\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Применим неравенство Фридрихса:

$$\frac{1}{2}\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{1}{\lambda}\left\|\kappa_1-\kappa_2\right\|_{C(\bar{\Omega})}\left\|\varphi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\varphi_2-\varphi_1\right\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{2}{\lambda}\left\|\kappa_1-\kappa_2\right\|_{C(\bar{\Omega})}\left\|\varphi_2\right\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{4}{\lambda^2}\left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\kappa_1-\kappa_2\right\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Теорема доказана.

2. Метод Галеркина и численный эксперимент

Как показано в [3], оператор $(-\Delta)^{-1}$ является компактным оператором в $L_2(\Omega)$. Нетрудно видеть, что оператор $(-\Delta)^{-1}$ является самосопряженным, следовательно, он имеет полную ортонормированную систему $e_{ks}(x,y)$ в $L_2(\Omega)$. Функции $e_{ks}(x,y)\in W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Пусть P_n – ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на линейную оболочку первых n собственных функций $e_{ks}(x,y), \quad k,s=\overline{1,n}$. Приближенное решение задачи (1.1) – (1.2), построенное по методу Галеркина, ищется в виде конечной суммы

$$\varphi_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{ks}\sin(k\pi x)\sin(s\pi y),$$

где неизвестные коэффициенты a_{ks} находятся из системы, равносильной операторному уравнению

$$-\Delta\varphi_n+P_n\left(\frac{1}{\lambda}(\mathbf{u},\nabla\varphi_n)+\frac{1}{\lambda}\kappa_n\varphi_n\right)=P_n\left(\frac{1}{\lambda}f\right).$$

Теорема 3. *Пусть* $f(x,y)\in L_2(\Omega), \quad \kappa(x,y)\in C^+(\overline{\Omega})$, $\boldsymbol{u}\in J(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$. *Тогда приближенные решения* $\varphi_n(x,y)$ *существуют при каждом n, они сходятся к точному решению* $\varphi(x,y)$ *по норме пространства* $W_2^2(\Omega)$, *и верны оценки:*

$$\left\|\varphi_n-\varphi\right\|_{L_2(\Omega)}\le\frac{C_2}{n},$$

где C_2 *не зависит от n.*

Доказательство. Проверим, что для задачи (1.1) выполнены условия, приведенные в работе [5].

Покажем, что оператор C подчинен оператору $-\Delta$ с порядком $\tau = 1/2$. Действительно,

$$\|C\varphi\|_{L_2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda}\left[\|(u,\nabla\varphi)\|_{L_2(\Omega)} + \|\kappa\varphi\|_{L_2(\Omega)}\right] \le \frac{1}{\lambda}\|u\|_{C(\bar{\Omega})}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda}\|\kappa\|_{C(\bar{\Omega})}\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}.$$

По неравенству Фридрихса

$$\|C\varphi\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{1}{\lambda}\left(\|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sqrt{2}\|\kappa\|_{C(\bar{\Omega})}\right)\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}.$$

Нетрудно видеть, что

$$-\Delta\varphi\cdot\varphi = \|\nabla\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|-\Delta\varphi\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда и из предыдущего получаем

$$\|C\varphi\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{1}{\lambda}\left(\|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sqrt{2}\|\kappa\|_{C(\bar{\Omega})}\right)\|-\Delta\varphi\|^{1/2}_{L_2(\Omega)}\|\varphi\|^{1/2}_{L_2(\Omega)}.$$

Теорема доказана.

Пусть $\kappa_m(x,y)$ сходится к неотрицательной функции $\kappa(x,y)$ по норме пространства $C(\overline{\Omega})$.

φ – точное решение, соответствующее $\kappa(x,y)$, φ_n – приближенное решение для $\kappa(x,y)$, φ_{nm} – приближенное решение для $\kappa_m(x,y)$.

Из теорем 2, 3 для разности $\varphi_{nm} - \varphi$ справедлива следующая оценка:

$$\|\varphi_{nm} - \varphi\|_{L_2(\Omega)} \le C_1\|\kappa_m - \kappa\|_{C(\bar{\Omega})} + \frac{C_2}{n}.$$

Приведем некоторые результаты вычислительных экспериментов. Пусть область Ω есть квадрат $0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1$. Пусть последовательность функций распада $\kappa_m(x,y)$ имеет вид $\kappa_m(x,y) = e^{-m^2xy}$, она сходится к нулю.

Пусть n = 5, $\lambda = 1$, $f(x,y) = e^{xy}$. На рис. 1, 2 приведены результаты расчетов при m = 1, m = 10.

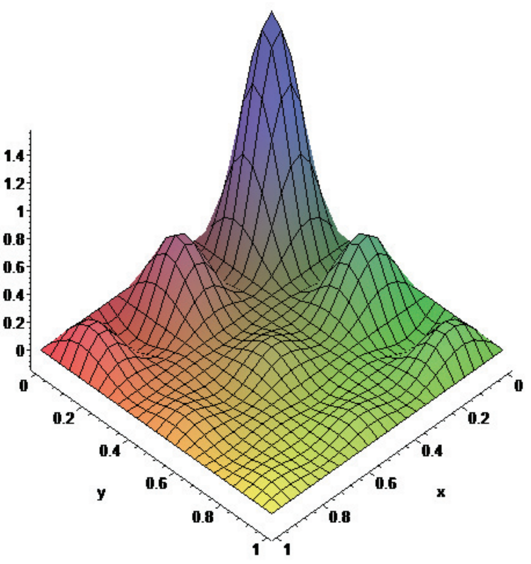

Рис.1. Решение задачи (1.1)–(1.2) при n = 5, m = 1

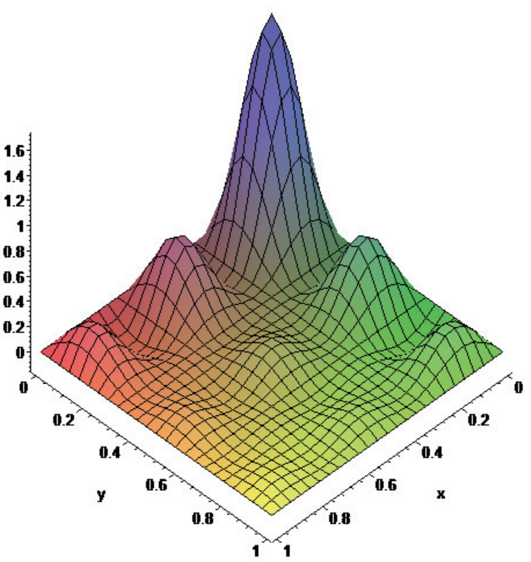

Рис.2. Решение задачи (1.1)–(1.2) при n = 5, m = 10

Пусть n = 10, $\lambda = 1$, $f(x, y) = -1 + e^{x}$. На рис. 3, 4 приведены результаты расчетов при m = 1, m = 10.

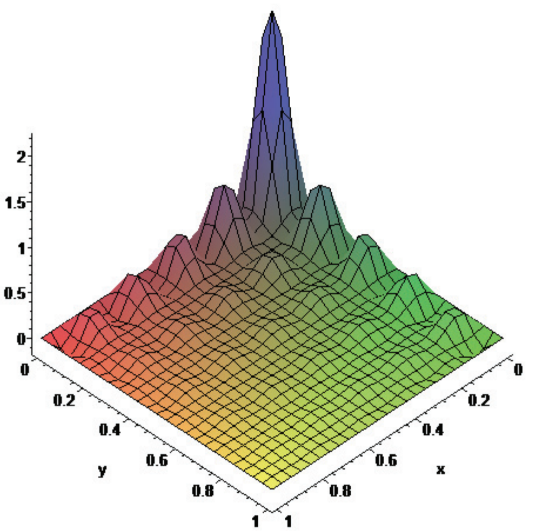

Рис.3. Решение задачи (1.1)–(1.2) при n = 10, m = 1

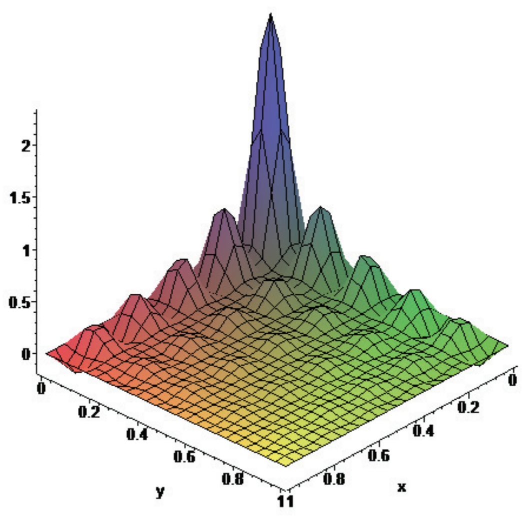

Рис.4. Решение задачи (1.1)–(1.2) при n = 10, m = 10

Библиографические ссылки

1. *Калинина Е. А* Теоретический и численный анализ задач идентификации для линейных моделей конвекции-диффузии-реакции. Владивосток, 2007.

2. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.

3. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Труды Московского математического общества. 1967. Т. 16.

4. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М., 1980.

5. *Зарубин А. Г.* О быстроте сходимости проекционных методов для линейных уравнений // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19. № 4.