УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Мегралиев. Я. Т. – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Дифференциальные и интегральные уравнения», e-mail: yashar_aze@mail.ru (Бакинский Государственный Университет)

В работе исследована одна обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным граничным условием**.** Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения задачи.

In this paper an inverse problem for the pseudohyperbolic fourth order equation of with periodical boundary conditions is investigated. First of all the initial problem is reduced to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness is proved. Then using these facts we prove the existence and uniqueness of the classical solution of the initial problem.

*Ключевые слова: о*братная краевая задача, дифференциального уравнения с частными производными, метод Фурье, классическое решение.

Введение

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается, и представляют собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Появление интегральных условий связно с тем, что при изучении некоторых физических процессов границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, но известно среднее значение искомых величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [1], распространением тепла [2, 3], процессом влагопереноса в капилярно – пористых средах [4], вопросами демографии и математической биологии.

Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t)-u_{ttxx}(x,t)+u_{xxxx}(x,t)=a(t)u(x,t)+f(x,t) \qquad (1)$$

в области $D_T=\{(x,t):\ 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\ (0\le x\le 1), \qquad (2)$$

периодическими условиями

$$u(0,t)=u(1,t),\ u_x(0,t)=u_x(1,t),\ u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)\ (0\le t\le T), \qquad (3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T) \qquad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0,t)=h(t) \quad (0\le t\le T), \qquad (5)$$

где $x_0\in(0,1)$ - фиксированное число, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ - заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ - искомые функции.

Определение.

Классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5) назовём пару $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);

2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;

3) все условия (1)-(5) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1.

Пусть $f(x,t)\in C(D_T),\ \varphi(x),\psi(x)\in C[0,1],\ h(t)\in C^2[0,T]$, $h(t)\ne 0,$

$$\int_0^1 f(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T),\quad \int_0^1\varphi(x)dx=0,\ \int_0^1\psi(x)dx=0,$$

$$\varphi(x_0)=h(0),\ \psi(x_0)=h'(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(5), из (1)-(3) и

$$u_{xxx}(0,t)=u_{xxx}(1,t)\ (0\le t\le T), \qquad (6)$$

$$h(t)a(t)+f(x_0,t)=h''(t)-u_{ttxx}(x_0,t)+u_{xxxx}(x_0,t) \quad (0\le t\le T)\ \ldots\ldots(7)$$

Доказательство.

Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)-(5). Интегрируя уравнение (1) по x от 0 до 1, имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx-(u_{ttx}(1,t)-u_{ttx}(0,t))+(u_{xxx}(1,t)-u_{xxx}(0,t))=$$

$$=a(t)\int_0^1 u(x,t)dx+\int_0^1 f(x,t)dx \ \ (0\le t\le T) \qquad (8)$$

Допуская, что $\int_0^1 f(x,t)dx=0 \ (0\le t\le T)$ и с учётом (3),(4), легко приходим к выполнению (6).

Отсюда легко приходим к выполнению (6).

Далее, считая $h(t)\in C^2[0,T]$ и дифференцируя два раза (5), получаем:

$$u_{tt}(x_0,t)=h''(t) \quad (0\le t\le T). \qquad (9)$$

Далее, из (1) имеем:

$$u_{tt}(x_0,t)-u_{ttxx}(x_0,t)+u_{xxxx}(x_0,t) \ =a(t)u(x_0,t)+f(x_0,t) \ \ (0\le t\le T). \qquad (10)$$

Отсюда, с учетом (5) и (9), приходим к выполнению (7).

Теперь, предположим, что $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (6), (7). Тогда из (8), с учётом (3) и (6), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx-a(t)\int_0^1 u(x,t)dx=0 \ \ (0\le t\le T). \qquad (11)$$

В силу (2) и $\int_0^1 \varphi(x)dx=0$, $\int_0^1 \psi(x)dx=0$, очевидно, что

$$\int_0^1 u(x,0)dx=\int_0^1 \varphi(x)dx=0, \ \int_0^1 u_t(x,0)dx=\int_0^1 \psi(x)dx=0. \qquad (12)$$

Так как задача (11), (12) имеет только тривиальное решение, то $\int_0^1 u(x,t)dx=0 \ \ (0\le t\le T)$, т.е. выполняется условия (4).

Далее, из (7) и (10), получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(x_0,t)-h(t))=a(t)(u(x_0,t)-h(t)) \quad (0\le t\le T). \qquad (13)$$

В силу (2) и $\varphi(x_0)=h(0),\psi(x_0)=h'(0)$, имеем:

$$u(x_0,t)-h(0)=\varphi(x_0)-h(0)=0, u_t(x_0,t)-\dot{h}'(0)=\psi(x_0)-h'(0)=0. \qquad (14)$$

Из (13) и (14), заключаем, что выполняется условие (5). Лемма доказана.

Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Известно [5], что система

$$1, \cos\lambda_1 x, \sin\lambda_1 x, ..., \cos\lambda_k x, \sin\lambda_k x, ... \qquad (15)$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$ $(k = 1,2,...)$.

Так как система (15) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого классического решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3),(6),(7) его первая компонента $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t)\cos\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k), \qquad (16)$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t)dx, u_{1k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \ (k = 1,2,...),$$

$$u_{2k}(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \ (k = 1,2,...).$$

Применяя формальную схему метода Фурье, для определения искомых коэффициентов $u_{1k}(t)$ $(k = 0,1,...)$ и $u_{2k}(t)$ $(k = 1,2,...)$ функции $u(x,t)$, из (1) и (2) получаем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t;u,a) \ (0 \le t \le T), \qquad (17)$$

$$(1 + \lambda_k{}^2)u''_{1k}(t) + \lambda_k{}^4 u_{1k}(t) = F_{1k}(t;u,a) \ (k = 1,2,...; 0 \le t \le T), \qquad (18)$$

$$u_{1k}(0) = \varphi_{1k}, \ \ u'_{1k}(0) = \psi_{1k} \quad (k = 0,1,...), \qquad (19)$$

$$(1 + \lambda_k^2)u''_{2k}(t) + \lambda_k^4 u_{2k}(t) = F_{2k}(t;u,a) \ (k = 1,2,...; 0 \le t \le T), \qquad (20)$$

$$u_{2k}(0) = \varphi_{2k}, \ \ u'_{2k}(0) = \psi_{2k} \quad (k = 1,2,...), \qquad (21)$$

где

$$F_{1k}(t;u,a) = a(t)u_{1k}(t) + f_{1k}(t), \quad (k = 0,1,...),$$

$$f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t)dx, f_{1k}(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx \ (k = 1,2,...),$$

$$\varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x)dx, \ \psi_{10} = \int_0^1 \psi(x)dx, \ \varphi_{1k} = 2\int_0^1 \varphi(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\psi_{1k} = 2\int_0^1 \psi(x)\cos\lambda_k x dx \quad (k = 1,2,...)$$

$$F_{2k}(t;u,a) = a(t)u_{2k}(t) + f_{2k}(t), \ f_{2k}(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x dx \ (k = 1,2,...),$$

$$\varphi_{2k} = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_k x dx, \ \psi_{2k} = 2\int_0^1 \psi(x)\sin\lambda_k x dx \ (k = 1,2,...).$$

Далее, из (17)-(21) находим:

$$u_{10}(t) = \varphi_{10} + t\psi_{10} + \int_0^t (t-\tau)F_{10}(\tau;u,a)d\tau \ \ (0 \le t \le T), \tag{22}$$

$$u_{ik}(t) = \varphi_{ik}\cos\beta_k t + \psi_{ik}\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau$$
$$(i=1,2;\ k=1,2,...;\ 0 \le t \le T) \tag{23}$$

где

$$\beta_k = \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{1+\lambda_k^2}}.$$

После подстановки выражений $u_{1k}(t)$ $(k=0,1,...)$ и $u_{2k}(t)$ $(k=1,2,...)$ в (16), для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)-(3),(6),(7) получаем:

$$u(x,t) = \varphi_{10} + t\psi_{10} + \int_0^t (t-\tau)F_{10}(\tau;u,a)d\tau + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_{1k}\cos\beta_k t + \psi_{1k}\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\cos\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_{2k}\cos\beta_k t + \right.$$
$$\left. + \psi_{2k}\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\sin\lambda_k x. \tag{24}$$

Теперь, из (7), с учетом (16), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t)\left\{h''(t) - f(x_0,t) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2(u_{1k}''(t) + \lambda_k^2 u_{1k}(t))\cos\lambda_k x_0 + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2(u_{2k}''(t) + \lambda_k^2 u_{2k}(t))\sin\lambda_k x_0\right\}. \tag{25}$$

Далее, из (17) и (19), в силу (23), получаем:

$$\lambda_k^2(u_{ik}''(t) + \lambda_k^2 u_{ik}(t)) = \frac{1}{\lambda_k^2}\beta_k^2 F_{ik}(t;u,a) + \beta_k^2\varphi_{ik}\cos\beta_k t + \beta_k\psi_{ik}\sin\beta_k t +$$
$$+ \frac{\beta_k}{1+\lambda_k^2}\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau \ \ (i=1,2; k=1,2,...). \tag{26}$$

Тогда из (25), с учетом (26), находим:

$$a(t) = h^{-1}(t)\left\{h''(t) - f(x_0,t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_k^2}\beta_k^2 F_{1k}(t;u,a) + \beta_k^2\varphi_{1k}\cos\beta_k t + \right.\right.$$
$$\left. + \beta_k\psi_{1k}\sin\beta_k t + \frac{\beta_k}{1+\lambda_k^2}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\cos\lambda_k x_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_k^2}\beta_k^2 F_{2k}(t;u,a)+\beta_k^2\varphi_{2k}\cos\beta_k t+\beta_k\psi_{2k}\sin\beta_k t+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\beta_k}{1+\lambda_k^2}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\sin\lambda_k x_0\right\}. \quad (27)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3),(6),(7) сведено к решению системы (24), (27) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3), (6), (7) важную роль играет следующая

Лемма 2.

Если $\{u(x,t),a(t)\}$ - любое классическое решение задачи (1)-(3),(6) ,(7), то функции

$$u_{10}(t)=\int_0^1 u(x,t)dx, u_{1k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \quad (k=1,2,...),$$

$$u_{2k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \quad (k=1,2,...)$$

удовлетворяют системе (22), (23).

Замечание.

Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)-(3), (6), (7) достаточно доказать единственность решения системы (24), (27).

Теперь рассмотрим следующие пространства:

Обозначим через $B_{2,T}^5$ [6], совокупность всех функций вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{1k}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=0}^{\infty}u_{2k}(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k=2\pi k),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_{1k}(t)$ $(k=0,1,...)$ и $u_{2k}(t)$ $(k=1,2,...)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}=J_T(u).$$

Через E_T^5 обозначим пространство $B_{2,T}^5\times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t)=\{u(x.t),a(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E_T^5}=\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}+\|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $B_{2,T}^5$ и E_T^5 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_{1k}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_{2k}(t)\sin\lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u,a)=\tilde{a}(t),$$

где $\tilde{u}_{10}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$ $(i=1,2;\ k=1,2,...)$ и $\tilde{a}(t)$ равны соответственно правым частям (21), (22) и (26).

Очевидно, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_k<\beta_k<\lambda_k.$$

Тогда с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]}\le|\varphi_{10}|+T|\psi_{10}|+T\sqrt{T}\left(\int_0^T|f_{10}(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac12}+T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]},\quad(28)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}\le2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac12}+2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac12}+$$

$$+2\sqrt{2T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|f_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac12}+2\sqrt{2}T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}\quad(i=1,2)\quad(29)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t)-f(x_0,t)\|_{C[0,T]}+\frac{\sqrt6}{12}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac12}+\right.$$

$$+\frac{\sqrt6}{12}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac12}+\frac{\sqrt{6T}}{12}\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|f_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac12}+$$

$$\left.+\frac{\sqrt6}{12}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\|f_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}+\frac{\sqrt6}{12}(1+T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}\right\}.(30)$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3),(6) ,(7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^4[0,1],\ \varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1)$ и

   $\varphi(0)=\varphi(1),\ \varphi'(0)=\varphi'(1),\ \varphi''(0)=\varphi''(1),\varphi'''(0)=\varphi'''(1),\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(1)$.

2. $\psi(x)\in C^3[0,1],\ \psi^{(4)}(x)\in L_2(0,1)$ и

   $\psi(0)=\psi(1),\ \psi'(0)=\psi'(1),\ \psi''(0)=\psi''(1),\psi'''(0)=\psi'''(1)$.

3. $f(x,t),\ f_x(x,t)\in C(D_T),\ f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T)$ и

$f(0,t)=f(1,t)$, $f_x(0,t)=f_x(1,t)\,(0\le t\le T)$.

4. $h(t)\in C^2[0,T],\ h(t)\ne 0\quad (0\le t\le T)$.

Тогда из (28)- (30) получаем:

$$\|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]}\le\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+T\sqrt{T}\,\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}\,, \tag{31}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\le 2\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+2\sqrt{2}\|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)}+2\sqrt{2T}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+2\sqrt{2}T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\quad (i=1,2)\,, \tag{32}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t)-f(x_0,t)\|_{C[0,T]}+\frac{\sqrt{6}}{6}\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{6}}{6}\|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{\sqrt{6T}}{6}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$

$$\left.+\frac{\sqrt{6}}{6}\Big\|\|f_{xx}(x,t)\|_{C[0,T]}\Big\|_{L_2(0,1)}+\frac{\sqrt{6}}{12}(1+T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\right\}. \tag{33}$$

Далее, из (31) и (32) находим:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\le A_1(T)+A_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\,, \tag{34}$$

где

$$A_1(T)=\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\sqrt{T}\,\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+4\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+4\sqrt{2}\|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)}+4\sqrt{2T}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_2(T)=(T+2\sqrt{2})T\,.$$

Теперь из (33) имеем:

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le B_1(T)+B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{35}$$

где

$$B_1(T)\le\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t)-f(x_0,t)\|_{C[0,T]}+\frac{\sqrt{6}}{6}\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{\sqrt{6}}{6}\|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{6T}}{6}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}+\frac{\sqrt{6}}{6}\Big\|\|f_{xx}(x,t)\|_{C[0,T]}\Big\|_{L_2(0,1)}\right\}$$

$$B_2(T)=\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\frac{\sqrt{6}}{12}(1+T)\,.$$

Из неравенств (34) и (35) заключаем:

$$\|\widetilde{u}(x,t)\|_{B^5_{2,T}} + \|\widetilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}, \qquad (36)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + B_1(T),\ B(T) = A_2(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.

Пусть выполнены условия 1-4 и

$$B(T)(A(T)+2)^2 \leq 1. \qquad (37)$$

Тогда задача (1)-(3), (6), (7) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E^5_T} \leq R = A(T)+2)$ из E^5_T единственное решение.

Доказательство.

В пространстве E^5_T рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \qquad (38)$$

где $z = \{u,a\}$, а компоненты Φ_i $(i=1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями (23), (26) соответственно.

Рассмотрим, оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K = K_R$ из E^5_T. Аналогично (35) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E^5_T} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}, \qquad (39)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E^5_T} \leq B(T)R(\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B^5_{2,T}}). \qquad (40)$$

Тогда из оценок (38) и (39), с учетом (37), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u,a\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением (38), т.е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (24), (27).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^5_{2,T}$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$ в D_T.

Теперь из (18) и (20) имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u''_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{2}\left\|\|f_x(x,t)+a(t)u_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)} \quad (i=1,2).$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$, $u_{ttx}(x,t)$, $u_{ttxx}(x,t)$ непрерывны в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3), (6) и (7) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x,t), a(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(3), (6), (7) и в силу леммы 2 это решение единственно. Теорема доказана.

С помощью леммы 1, легко доказывается следующая

Теорема 2.

Пусть выполнены все условия теоремы 1 и

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \ \ (0 \le t \le T), \ \int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \ \int_0^1 \psi(x)dx = 0,$$

$$\varphi(x_0) = h(0), \ \ \psi(x_0) = h'(0).$$

Тогда задача (1)-(5) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \le R = A(T) + 2)$ из E_T^5 единственное классическое решение.

Библиографические ссылки

1. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1980. - Т.16. - №11. - С.1925-1935.

2. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. - V.5, 21. – P.155-160.

3. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. - Т.13. - №2. - С.294-304.

4. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. – 1982. - Т.18. - №1. - С.72-81.

5. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихов А.Н.* Сборник задач по математической физике. Москва: Наука, 1972, 668 с.

6. *Худавердиев К.И., Велиев А.А.* Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью, Баку: Чашыоглы, 2010, 168 с.