ВЕСТНИК ТОГУ. 2007. № 4 (7)

УДК 517.988.8

ОБ ОДНОМ КОМБИНИРОВАННОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Виноградова П. В. – канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Прикладная математика и информатика»;
Зарубин А. Г. – д-р физ.-мат. наук, проф. завкафедрой "Прикладная математика и информатика" (ТОГУ)

Исследуется комбинированный метод нахождения приближенного решения линейного дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Устанавливаются оценки скорости сходимости приближенных решений к точному в узлах сетки.

This article investigates the combined method the approximated solution for the linear differentially functional equations in Hilbert's space. Estimations of velocity convergence of the approximated solutions to exact in knots of a grid are established.

1. Постановка задачи

Пусть H_1 – сепарабельное гильбертово пространство, плотно вложенное в сепарабельное гильбертово пространство H с нормой

$$\|\cdot\|_H \equiv \|\cdot\|.$$

Через **B2=B2**(0,T,H) обозначим гильбертово пространство всех сильно измеримых на [0,T] со значениями в H функций, для которых конечна норма

$$\|u(t)\|_{0,2} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим функции $u(t)$ со значениями в H_1, имеющие непрерывную производную $u'(t)$ в H. Во множестве таких функций введем норму

$$\|u(t)\|_{1,2} = \left(\int_0^T \left(\|u'(t)\|^2 + \|u(t)\|_{H_1}^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пополнение данного множества по этой норме есть гильбертово пространство

$$\mathbf{B}^1_2 = \mathbf{B}^1_2(0,T;H,H_1).$$

В пространстве H рассмотрим задачу Коши

$$u'(t) + Au(t) + Ku(t) = h(t), \quad u(0) = 0. \tag{1}$$

Операторы A и K удовлетворяют условиям:

1) A - самосопряженный, положительно определенный оператор в H с областью определения $\mathrm{D(A)} = \mathrm{H}_1$;

2) оператор K подчинен оператору A с порядком α, т.е. (см. [1, с. 176]) для любого $z \in H_1$ существует положительная постоянная M, такая, что

$$\|Kz\| \le M \|Az\|^{\alpha} \|z\|^{1-\alpha}, \quad 0 \le \alpha < 1; \tag{2}$$

3) оператор B - сходный с оператором A (см. [2, с. 292]) и операторы A, B образуют острый угол (см. [3]), т.е. $(Az, Bz)_H \ge m\|Az\|\|Bz\|$, где постоянная $m > 0$ не зависит от выбора z из H_1.

Будем предполагать, что B^{-1} и A^{-1} вполне непрерывны в H. Обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ полную систему собственных элементов оператора B, которым соответствуют собственные числа $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n, \ldots, \lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Линейную оболочку элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ обозначим через H^n. Пусть P_n - оператор ортогонального проектирования H на H^n.

В подпространстве H^n рассмотрим задачу

$$u_n'(t) + P_n A u_n(t) + P_n K u_n(t) = P_n h(t), \qquad u_n(0) = 0. \tag{3}$$

Решения $u_n(t)$ задачи (3) называются приближенными решениями задачи (1), построенными по методу Фаэдо-Галеркина. Решением в $\mathbf{B}^1{}_2$ задачи (1) называют абсолютно непрерывную функцию $u(t)$, которая почти при всех t удовлетворяет уравнению и начальному условию (1).

Из сходности операторов B и A, а также неравенств острого угла и (2) следует, что оператор K подчинен оператору B с порядком α.

На отрезке [0,T] введем равномерную сетку $\varpi = \{t_s = s\tau,\ s = 0,1,\ldots,N,\ \tau N = T\}$.

Вектор $\varpi_n^\tau = \{\varpi_n^s\}_{s=0}^N$, где $\varpi_n^s \in H^n$ для любого s и

$$\varpi_n^s = \sum_{j=1}^n \alpha_j^s \varphi_j,$$

является решением системы алгебраических уравнений:

$$\frac{\varpi_n^{s+1} - \varpi_n^{s-1}}{2\tau} + P_n A\left(\frac{\varpi_n^{s+1} + \varpi_n^{s-1}}{2}\right) + P_n K \varpi_n^s = P_n h(t_s), \tag{4}$$

$$\varpi_n^0 = 0, \quad \varpi_n^1 = \tau^2 \varphi_1, \quad s = 1,2,\ldots,N-1. \tag{5}$$

Решение ϖ_n^s задачи (4)-(5) будем называть приближенным решением задачи (1), построенным по проекционно-разностному методу.

2. Оценки погрешности проекционно-разностного метода

Вначале исследуем метод Фаэдо-Галеркина (3) для задачи Коши (1).

В дальнейшем через M_i $(i = 1,2,\ldots)$ будем обозначать положительные постоянные, независящие от n и t.

Установим ряд оценок на галеркинские приближения.

Лемма. *Пусть функция* $h(t) \in C^3(0,T;H)$,, $h(0) = 0$, $h'(0) \in D\left(B^{3/2}\right)$, *операторы* A, K, B *удовлетворяют условиям 1)—3), операторы* K *и* $B^{-1/2}$ *перестановочны. Тогда при каждом* n *задача (3) имеет решение*

$u_n(t)$ из пространства $C^4(0,T;H)$ и оно единственно. Причем справедливы оценки

$$\|u'(t)\| + \|Au_n(t)\| \le M_1, \tag{6}$$

$$\|u''(t)\| + \|Au_n'(t)\| \le M_2, \tag{7}$$

$$\|u'''(t)\| + \|Au_n''(t)\| \le M_3. \tag{8}$$

Доказательство. Задача (3) равносильна задаче Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с трижды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами и правой частью из $C^3(0,T)$, поэтому задача (3) имеет при каждом n решение $u_n(t)$ из $C^4(0,T;H)$ и оно единственно.

Умножим уравнение (3) скалярно в H на Bu_n и проинтегрируем от 0 до $\varsigma \le T$. Используя неравенство острого угла и дробные степени оператора B, получаем

$$\frac{1}{2}\left\|B^{\frac{1}{2}}u_n(\varsigma)\right\|^2 + m\left\|BA^{-1}\right\|^{-1}\int_0^{\varsigma}\|Bu_n\|^2\,dt \le \int_0^{\varsigma}\left|(Ku_n, Bu_n)_H\right|dt + \int_0^{\varsigma}\left|(h(t), Bu_n)_H\right|dt.$$

Воспользуемся ε-неравенством и подчиненностью оператора K оператору B с порядком α, тогда

$$\frac{1}{2}\left\|B^{\frac{1}{2}}u_n(\varsigma)\right\|^2 + m\left\|BA^{-1}\right\|^{-1}\int_0^{\varsigma}\|Bu_n\|^2\,dt \le M\left\|AB^{-1}\right\|^{\alpha}\int_0^{\varsigma}\|Bu_n\|^{1+\alpha}\|u_n\|^{1-\alpha}\,dt +$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\varsigma}\|Bu_n\|^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon}\|h(t)\|_{0,2}^2.$$

Применим к первому слагаемому правой части последнего соотношения неравенство Юнга (см. [4, с. 74]) и выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым, тогда

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}u_n(\varsigma)\right\|^2 + M_4\int_0^{\varsigma}\|Bu_n\|^2 dt \le M_5\int_0^{\varsigma}\|u_n\|^2 dt + M_6\|h(t)\|_{0,2}^2.$$

Так как оператор B положительно определен, то

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}u_n(\varsigma)\right\|^2 + M_4\int_0^{\varsigma}\|Bu_n\|^2 dt \le M_7\int_0^{\varsigma}\left\|B^{\frac{1}{2}}u_n\right\|^2 dt + M_6\|h(t)\|_{0,2}^2. \tag{9}$$

Из (9) и неравенства Гронуолла (см. [4, с. 112]) вытекает оценка

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}u_n\right\| \le M_8. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует

$$\|Bu_n\|_{0,2} \le M_9. \tag{11}$$

Так как функция $h(t)$ принадлежит пространству $C^3(0,T;H)$, а решение $u_n(t)$ при каждом n принадлежит пространству $C^4(0,T;H)$, то уравнение (3) можно продифференцировать по t, поэтому, полагая $u_n'(t) = v(t)$, имеем

$$v_n'(t) + P_nAv_n(t) + P_nKv_n(t) = P_nh'(t), \tag{12}$$

$$v_n(0) = 0. \tag{13}$$

Далее, используя методику вывода неравенства (9), получаем

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}v_n(\varsigma)\right\|^2 + M_4\int_0^{\varsigma}\|Bv_n\|^2 dt \le M_7\int_0^{\varsigma}\left\|B^{\frac{1}{2}}v_n\right\|^2 dt + M_6\|P_nh'(t)\|_{0,2}^2. \tag{14}$$

Из (14), аналогично получению оценок (10), (11), имеем

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} v_n \right\| \le M_{10}. \tag{15}$$

$$\left\| B v_n \right\|_{0,2} \le M_{11}. \tag{16}$$

Далее, из (3) следует
$$\left\| P_n A u_n \right\| \le \left\| u_n' \right\| + \left\| K u_n \right\| + \left\| h(t) \right\|.$$

Так как верны неравенства (2), (10), (15), то

$$\left\| P_n A u_n \right\| \le M_{10} \left\| B^{-\frac{1}{2}} \right\| + M m^{-\alpha} \left\| A u_n \right\|^{\alpha} \left\| B^{-\frac{1}{2}} \right\|^{1-\alpha} M_8^{1-\alpha} + \sup_{0 \le t \le T} \left\| h(t) \right\|.$$

Отсюда и из неравенства острого угла имеем

$$m \left\| A u_n \right\| \le M_{10} \left\| B^{-\frac{1}{2}} \right\| + M m^{-\alpha} \left\| A u_n \right\|^{\alpha} \left\| B^{-\frac{1}{2}} \right\|^{1-\alpha} M_8^{1-\alpha} + \sup_{0 \le t \le T} \left\| h(t) \right\|.$$

Так как $0 \le \alpha < 1$, то из последнего неравенства вытекает

$$\left\| A u_n \right\| \le M_{12}. \tag{17}$$

Из (15) и (17) следует оценка (6).

Дифференцируя (13) по t и обозначая через $w_n(t) = v_n'(t)$, приходим к задаче

$$w_n'(t) + P_n A w_n(t) + P_n K w_n(t) = P_n h''(t), \tag{18}$$

$$w_n(0) = P_n h'(0). \tag{19}$$

Для $w_n(t)$ справедлива оценка

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} w_n(\varsigma) \right\|^2 + M_4 \int_0^{\varsigma} \|Bw_n\|^2 dt \le M_7 \int_0^{\varsigma} \left\| B^{\frac{1}{2}} w_n \right\|^2 dt + M_6 \|P_n h''(t)\|_{0,2}^2 + \left\| B^{\frac{1}{2}} P_n h'(0) \right\|^2 .$$

Отсюда, используя неравенства (10), (11), (15), (16), получаем

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} w_n(\varsigma) \right\|^2 + M_4 \int_0^{\varsigma} \|Bw_n\|^2 dt \le M_7 \int_0^{\varsigma} \left\| B^{\frac{1}{2}} w_n \right\|^2 dt + M_{13} \|h''(t)\|_{0,2}^2 + M_{14} + \left\| B^{\frac{1}{2}} P_n h'(0) \right\|^2 .$$

Так как $h'(0) \in D\left(B^{3/2} \right)$, то

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} P_n h'(0) \right\| = \left\| B^{\frac{1}{2}} P_n B^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} h'(0) \right\| \le M_{15}.$$

Поэтому, применяя к предыдущему соотношению неравенство Гронуолла, получаем оценки

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} w_n \right\| \le M_{16}, \tag{20}$$

$$\|Bw_n\|_{0,2} \le M_{17}. \tag{21}$$

Из (12) следует

$$\|P_n A v_n\| \le \|v_n'\| + \|K v_n\| + \sup_{0 \le t \le T} \|h'(t)\|.$$

Отсюда и из (20) следует

$$\|P_n A v_n\| \le M_{18} + \|K v_n\| + \sup_{0 \le t \le T} \|h'(t)\|.$$

Далее, по аналогии с выводом оценки (17) можно получить

$$\|A v_n\| \le M_{19}. \tag{22}$$

Из (20) и (22) вытекает (7).

Дифференцируя уравнение (18) по t и полагая $w_n'(t) = \theta_n(t)$, имеем

$$\theta_n'(t) + P_n A \theta_n(t) + P_n K \theta_n(t) = P_n h'''(t),$$

$$\theta_n(0) = P_n h''(0) - P_n A P_n h'(0) - P_n K P_n h'(0).$$

Таким образом,

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} \theta_n(\varsigma) \right\|^2 + M_4 \int_0^{\varsigma} \|B\theta_n\|^2 dt \le M_7 \int_0^{\varsigma} \left\| B^{\frac{1}{2}} \theta_n \right\|^2 dt + M_6 \|P_n h'''(t)\|_{0,2}^2 + \tag{23}$$

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} P_n (h''(0) - A P_n h'(0) - K P_n h'(0) \right\|^2.$$

Из неравенства Э. Гайнца (см. [1, с.178]) и из сходности операторов A и B следует ограниченность операторов $B^{1/2}A^{-1/2}$ и $A^{3/2}B^{-3/2}$, поэтому из (23) имеем

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} P_n A P_n h'(0) \right\| \le \left\| B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \right\| \left\| A^{\frac{3}{2}} B^{-\frac{3}{2}} \right\| \left\| B^{\frac{3}{2}} P_n h'(0) \right\| \le M_{20} \left\| B^{\frac{3}{2}} h'(0) \right\|. \tag{24}$$

В силу перестановочности операторов K и $B^{-1/2}$ справедливо соотношение

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} P_n K B^{-\frac{3}{2}} P_n B^{\frac{3}{2}} h'(0) \right\| = \left\| B^{\frac{1}{2}} P_n B^{-\frac{1}{2}} K B^{-1} P_n B^{\frac{3}{2}} h'(0) \right\| \le \left\| K B^{-1} P_n B^{\frac{3}{2}} h'(0) \right\|.$$

Отсюда и из подчиненности оператора K получаем

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} P_n K P_n h'(0) \right\| \le M_{21} \left\| P_n B^{\frac{3}{2}} h'(0) \right\|^{\alpha} \left\| B^{-1} P_n B^{\frac{3}{2}} h'(0) \right\|^{1-\alpha} \le M_{22} \left\| B^{\frac{3}{2}} h'(0) \right\|. \tag{25}$$

Из неравенств (23), (24), (25) вытекает соотношение

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} \theta_n(\varsigma) \right\|^2 + M_4 \int_0^{\varsigma} \|B\theta_n\|^2 dt \le M_7 \int_0^{\varsigma} \left\| B^{\frac{1}{2}} \theta_n \right\|^2 dt + M_{23},$$

из которого следуют оценки

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} \theta_n \right\| \le M_{24}, \tag{26}$$

$$\left\| B\theta_n \right\|_{0,2} \le M_{25}. \tag{27}$$

Далее, применяя методику вывода оценок (6), (7) с использованием (26), (27), получаем (8). Лемма доказана.

Запишем задачу (4)-(5) в виде

$$\varpi_n^{s+1} + \tau P_n A \varpi_n^{s+1} = 2\tau P_n h(t_s) - 2\tau P_n K \varpi_n^s - \tau P_n A \varpi_n^{s-1} + \varpi_n^{s-1}, \tag{28}$$

$$\varpi_n^0 = 0, \quad \varpi_n^1 = \tau^2 \varphi_1. \tag{29}$$

При любом $s \ge 1$ правая часть уравнения (28) принадлежит H^n. Из свойств оператора A и неравенства острого угла следует, что оператор $I + \tau P_n A$ имеет обратный $(I + \tau P_n A)^{-1}$, действующий из H^n в H^n. Следовательно, задача (28), (29) имеет решение ϖ_n^{s+1} из H^n.

В дальнейшем через m_i $(i = 1,2,\ldots)$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от n и s.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы при* $0 \le \alpha \le 1/2$. *Тогда для* ϖ_n^s *и* $u_n(t_s)$ *верна оценка погрешности*

$$\sup_{0 \le t \le T} \left\| B^{\frac{1}{2}} \left(\varpi_n^{s+1} - u_n(t_{s+1}) \right) \right\| \le m_1 \tau^2, \quad s = 0,1,\ldots,N-1. \tag{30}$$

Доказательство. Так как $u_n(0) = 0$, $u_n'(0) = 0$, то используя разложение функции $u_n(t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $t = 0$, получим

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} \left(\varpi_n^1 - u_n(\tau) \right) \right\| \le \lambda_1^{\frac{1}{2}} \tau^2 \left\| \varphi_1 \right\| + \left\| \int_0^\tau (\tau - t) B^{\frac{1}{2}} u_n''(t) dt \right\|.$$

Отсюда в силу оценки (20), имеем

$$\left\| B^{\frac{1}{2}} \left(\varpi_n^1 - u_n(\tau) \right) \right\| \le \lambda_1^{\frac{1}{2}} \tau^2 \left\| \varphi_1 \right\| + M_{16} \tau^2.$$

Далее, при $s \geq 1$ справедливо соотношение

$$\frac{u_n(t_{s+1}) - u_n(t_{s-1})}{2\tau} = u_n'(t_s) + \frac{1}{4\tau}\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{s+1} - t)^2 u_n'''(t)dt + \int_{t_{s-1}}^{t_s} (t_{s-1} - t)^2 u_n'''(t)dt\right). \quad (31)$$

Рассмотрим величину

$$\psi_n^s = \frac{u_n(t_{s+1}) - u_n(t_{s-1})}{2\tau} + P_n A\left(\frac{u_n(t_{s+1}) + u_n(t_{s-1})}{2}\right) + P_n K u_n(t_s) - P_n h(t_s).$$

Из (31) получаем

$$\psi_n^s = u_n'(t_s) + P_n A\left(\frac{u_n(t_{s+1}) + u_n(t_{s-1})}{2}\right) + P_n K u_n(t_s) - P_n h(t_s) +$$
$$\frac{1}{4\tau}\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{s+1} - t)^2 u_n'''(t)dt + \int_{t_{s-1}}^{t_s} (t_{s-1} - t)^2 u_n'''(t)dt\right).$$

Так как $u_n(t)$ – решение задачи (3), то

$$\psi_n^s = P_n A\left(\frac{u_n(t_{s+1}) - 2u_n(t_s) + u_n(t_{s-1})}{2}\right) + \quad (32)$$
$$\frac{1}{4\tau}\left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{s+1} - t)^2 u_n'''(t)dt + \int_{t_{s-1}}^{t_s} (t_{s-1} - t)^2 u_n'''(t)dt\right).$$

Из (32) и неравенства (8) вытекает оценка

$$\left\|\psi_n^s\right\| \leq M_3 \tau^2. \quad (33)$$

Положим

$$z_n^s = \varpi_n^s - u_n(t_s).$$

При $s = 0$ имеем $z_n^0 = 0$, а при $s = 1$, как показано выше, верна оценка

$$\left\|B^{\frac{1}{2}} z_n^1\right\| \leq m_2 \tau^2, \quad (34)$$

где $m_2 = \lambda_1^{1/2}\left\|\varphi_1\right\| + M_{16}$. При $s \geq 1$ справедливо тождество

$$\frac{z_n^{s+1} - z_n^{s-1}}{2\tau} + P_n A\left(\frac{z_n^{s+1} + z_n^{s-1}}{2}\right) + P_n K z_n^s = -\psi_n^s. \quad (35)$$

Умножим (35) скалярно в H на $2\tau B(z_n^{s+1} + z_n^{s-1})$, используя неравенство острого угла, получим

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{s+1}\right\|^2-\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{s-1}\right\|^2+\tau m\left\|A\left(z_n^{s+1}+z_n^{s-1}\right)\right\|\left\|B\left(z_n^{s+1}+z_n^{s-1}\right)\right\|\le$$

$$2\tau\left\|\psi_n^s\right\|\left\|B\left(z_n^{s+1}+z_n^{s-1}\right)\right\|+2\tau\left|\left(Kz_n^s,B\left(z_n^{s+1}+z_n^{s-1}\right)\right)_H\right|.$$

Отсюда, применяя ε-неравенство, находим

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{s+1}\right\|^2-\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{s-1}\right\|^2+\tau m\left\|BA^{-1}\right\|^{-1}\left\|B\left(z_n^{s+1}+z_n^{s-1}\right)\right\|^2\le$$

$$\frac{\tau}{\varepsilon}\left\|\psi_n^s\right\|^2+2\varepsilon\tau\left\|B\left(z_n^{s+1}+z_n^{s-1}\right)\right\|^2+\frac{\tau}{\varepsilon}\left\|Kz_n^s\right\|^2.$$

Выбирая $\varepsilon=m\left\|BA^{-1}\right\|^{-1}\Big/4\equiv m_3$ и используя (33), получаем

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{s+1}\right\|^2-\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{s-1}\right\|^2+2\tau m_3\left\|B\left(z_n^{s+1}+z_n^{s-1}\right)\right\|^2\le m_3^{-1}M_3^2\tau^5+\tau m_3^{-1}\left\|Kz_n^s\right\|^2. \quad (36)$$

Известно (см. [1]), что если оператор K подчинен оператору B с порядком α, то для любого $z\in H$ выполняется неравенство $\left\|KB^{-\alpha}z\right\|\le R\|z\|$, где $R>0$. Отсюда и из (36) следует

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{s+1}\right\|^2-\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{s-1}\right\|^2\le m_3^{-1}M_3^2\tau^5+\tau m_4\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{s}\right\|^2.$$

Просуммируем последнее неравенство по s от 1 до $k\le N-1$

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{k+1}\right\|^2\le m_3^{-1}M_3^2T\tau^4+\tau m_4\sum_{s=1}^{k}\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{s}\right\|^2+\left\|B^{\frac{1}{2}}z_n^{1}\right\|^2.$$

Отсюда, из (34) и разностного аналога неравенства Гронуолла (см. [5]) получаем (30). Теорема доказана.

Из данной теоремы нетрудно получить оценку

$$\tau\sum_{s=1}^{k}\left\|B\left(z_n^{s+1}+z_n^{s-1}\right)\right\|^2\le m_5\tau^4.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$\sup_{0\le s\le N}\left\|\varpi_n^s-u(t_s)\right\|\le m_6\left(\tau^2+\lambda_{n+1}^{\frac{\alpha-1}{2}}\right), \quad (37)$$

$$\sup_{0\le s\le N}\left\| B^{\frac{1}{2}}\left(\varpi_n^s - u(t_s)\right)\right\| \le m_7\left(\tau^{\frac{3}{2}} + \tau^{-\frac{1}{2}}\lambda_{n+1}^{\frac{\alpha-1}{4}}\right). \tag{38}$$

Доказательство. В работе [6, с. 76] при предположениях, указанных выше, на операторы A и K и принадлежности $h(t)$ пространству $\mathbf{B_2}$ установлены следующие соотношения:

$$\sup_{0\le t\le T}\left\| u_n(t) - u(t)\right\| \le M_{26}\lambda_{n+1}^{\frac{\alpha-1}{2}}, \tag{39}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\| u_n(t) - u(t)\right\|_{1,2} = 0. \tag{40}$$

Поэтому из теоремы 1 следует

$$\left\|\varpi_n^s - u(t_s)\right\| \le \left\| z_n^s\right\| + \left\| u(t_s) - u_n(t_s)\right\| \le m_8\left(\tau^2 + \lambda_{n+1}^{\frac{\alpha-1}{2}}\right).$$

Далее,

$$\tau\sum_{s=1}^{N}\left\| B^{\frac{1}{2}}\left(\varpi_n^s - u(t_s)\right)\right\|^2 \le 2\tau\sum_{s=1}^{N}\left\| B^{\frac{1}{2}} z_n^s\right\|^2 + 2\tau\sum_{s=1}^{N}\left\| B^{\frac{1}{2}}\left(u_n(t_s) - u(t_s)\right)\right\|^2.$$

Отсюда и из согласованности интегральной и дискретной норм [7, с.287] получаем

$$\tau\sum_{s=1}^{N}\left\| B^{\frac{1}{2}}\left(\varpi_n^s - u(t_s)\right)\right\|^2 \le 2\tau\sum_{s=1}^{N}\left\| B^{\frac{1}{2}} z_n^s\right\|^2 + m_9\left\| B^{\frac{1}{2}}\left(u_n(t) - u(t)\right)\right\|_{0,2}^2.$$

Воспользуемся неравенством моментов [1, с.157] и (30), (39), (40), тогда

$$\tau\sum_{s=1}^{N}\left\| B^{\frac{1}{2}}\left(\varpi_n^s - u(t_s)\right)\right\|^2 \le 2m_1^2 T\tau^4 + m_{10}\lambda_{n+1}^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

Из последнего неравенства вытекает (38). Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
2. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., 1970.
3. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях с операторами, образующими острый угол // ДАН СССР. 1957. Т. 116. № 5.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

5. *Демидович В. Б.* Об асимптотическом поведении решений конечно-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 12.
6. *Зарубин А. Г.* Исследование методом дробных степеней проекционных процедур решения линейных и квазилинейных уравнений. Хабаровск, 1986.
7. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. М., 1989.