ВЕСТНИК ТОГУ. 2008. № 4 (11)

УДК 519.642.8

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОДИФИЦИРОВАННОГО ФУНКЦИОНАЛА ЛАГРАНЖА В ПОЛУКОЭРЦИТИВНОЙ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ СИНЬОРИНИ

Вихтенко Э. М. – канд. физ. - мат. наук, доц. кафедры "Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем", тел. (4212) 37-52-03, e-mail: vikht@mail.khstu.ru; *Намм Р. В.* – д - р. физ. - мат. наук, проф. завкафедрой "Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем", тел. (4212) 37-52-03, e-mail: namm@mail.khstu.ru (ТОГУ)

Для полукоэрцитивной задачи Синьорини исследован модифицированный функционал Лагранжа. Показано совпадение множества седловых точек классического функционала Лагранжа со можеством седловых точек модифицированного функционала Лагранжа.

The modified Lagrangian functional was investigated for Semicoercive Signorini's problem. It was shown that the set of saddle points of modified Lagrangian functional is the same as the set of saddle points of classical Lagrangian functional.

Ключевые слова: задача Синьорини, функционал Лагранжа, двойственность, субдифференциал.

Рассматривается скалярная полукоэрцитивная задача Синьорини [1], [2]

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega - \int\limits_{\Omega} f\, v d\Omega - \min, \\ v \in \mathrm{K} = \{w \in W_2^1(\Omega) : \gamma w \geq 0 \text{ п.в. на } \Gamma\}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с достаточно гладкой регулярной границей Γ, $f \in L_2(\Omega)$ – заданная функция, $\gamma v \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ – след функции $v \in W_2^1(\Omega)$ на Γ.

Задача (1) может не иметь решения. Однако если

$$\int\limits_{\Omega} f\, d\Omega < 0, \tag{2}$$

то $J(v) \to +\infty$ при $\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \to \infty$, $v \in \mathrm{K}$ и, тем самым, решение задачи (1) существует, более того, оно единственно [1].

На пространстве $W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)$ определим классический функционал Лагранжа

$$L(v,l)=J(v)-\int_\Gamma l\gamma v d\Gamma.$$

Пусть $(L_2(\Gamma))^+$ – множество неотрицательных на Γ функций, интегрируемых со своим квадратом.

В дальнейшем изложении предполагаем, что решение u задачи (1) принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$. Тогда пара $\left(u,\frac{\partial u}{\partial n}\right)$ (n – вектор единичной внешней нормали к Γ) является единственной седловой точкой функционала Лагранжа, т. е. [3], [4]:

$$L(u,l)\le L\left(u,\frac{\partial u}{\partial n}\right)\le L\left(v,\frac{\partial u}{\partial n}\right)\ \forall v\in W_2^1(\Omega),\ \forall l\in (L_2(\Gamma))^+.$$

Так как квадратичная форма $a(v,v)=\int_\Omega |\nabla v|^2\,d\Omega$ лишь неотрицательно определена на пространстве $W_2^1(\Omega)$, то известные итерационные методы поиска седловой точки не обеспечивают свойство сходимости. Для преодоления этого затруднения рассмотрим некоторую модификацию функционала Лагранжа. На пространстве $W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)\times L_2(\Gamma)$ рассмотрим функционал [4], [5]

$$K(v,l,m)=\begin{cases} J(v)+\dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_\Gamma\left((l+rm)^2-l^2\right)d\Gamma, & \text{если} -\gamma v\le m \text{ п.в. на } \Gamma,\\ +\infty & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $r>0$ – const.

Определим модифицированный функционал Лагранжа

$$M(v,l)=\inf_m K(v,l,m). \tag{3}$$

Пара (v^*,l^*) называется седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа $M(v,l)$, если выполняются неравенства

$$M(v^*,l)\le M\left(v^*,l^*\right)\le M\left(v,l^*\right)\quad \forall v\in W_2^1(\Omega),\ \forall l\in L_2(\Gamma).$$

Исследуем свойства модифицированного функционала Лагранжа.

Легко видеть, что

$$M(v,l)=\inf_m K(v,l,m)=\inf_{-\gamma v\le m}\left\{J(v)+\frac{1}{2r}\int_\Gamma\left((l+rm)^2-l^2\right)d\Gamma\right\}=$$

$$=J(v)+\frac{1}{2r}\inf_{-\gamma v\le m}\int_\Gamma\left((l+rm)^2-l^2\right)d\Gamma=J(v)+\frac{1}{2r}\int_\Gamma\left(\left((l-r\gamma v)^+\right)^2-l^2\right)d\Gamma. \tag{4}$$

Определим функционал

$$\underline{M}(l) = \inf_v M(v,l) = \inf_v \inf_m K(v,l,m) =$$
$$= \inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_\Gamma \left(\left((l - r\gamma v)^+ \right)^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\}. \qquad (5)$$

Так как

$$\inf_v \inf_m K(v,l,m) = \inf_m \inf_v K(v,l,m),$$

то

$$\underline{M}(l) = \inf_m \inf_v K(v,l,m) = \inf_m \inf_{-\gamma v \le m} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_\Gamma \left((l + rm)^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\} =$$
$$= \inf_m \left\{ \inf_{-\gamma v \le m} J(v) + \int_\Gamma lm\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2\, d\Gamma \right\} = \inf_m \left\{ \chi(m) + \int_\Gamma lm\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2\, d\Gamma \right\}, \quad (6)$$

где $\chi(m) = \inf\limits_{-\gamma v \le m} J(v)$ – функция чувствительности.

Известно, что при выполнении условия (2) задача

$$\begin{cases} J(v) - \min, \\ -\gamma v \le m \end{cases}$$

разрешима при любом $m \in L_2(\Gamma)$ [2].

Покажем, что $\chi(m)$ – выпуклая функция. Действительно, пусть $\chi(m_1) = J(v_1)$, $\chi(m_2) = J(v_2)$. Имеем для $0 < \lambda < 1$

$$\gamma\big((1-\lambda)v_1 + \lambda v_2\big) = (1-\lambda)\gamma v_1 + \lambda\gamma v_2 \ge -(1-\lambda)m_1 - \lambda m_2,$$
$$-\gamma\big((1-\lambda)v_1 + \lambda v_2\big) \le (1-\lambda)m_1 + \lambda m_2.$$

Поэтому

$$\chi((1-\lambda)m_1 + \lambda m_2) = \inf_{-\gamma v \le (1-\lambda)m_1 + \lambda m_2} J(v) \le$$
$$\le J((1-\lambda)v_1 + \lambda v_2) \le (1-\lambda)J(v_1) + \lambda J(v_2) = (1-\lambda)\chi(m_1) + \lambda\chi(m_2),$$

т. е. $\chi(m)$ – выпуклый конечнозначный функционал на $L_2(\Gamma)$. Тогда

$$\chi(m) + \int_\Gamma lm\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2\, d\Gamma$$

является сильно выпуклым функционалом в $L_2(\Gamma)$. Следовательно, задача (6) разрешима, т. е. для любого $l \in L_2(\Gamma)$ существует $m(l)$, такой, что

$$\underline{M}(l) = \inf_m \left\{ \chi(m) + \int_\Gamma lm\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2\, d\Gamma \right\} =$$

$$= \chi(m(l)) + \int_\Gamma l m(l)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma (m(l))^2\, d\Gamma.$$

Обозначим

$$v(l) = \arg\min_{-\gamma v \le m} J(v).$$

Тогда

$$\underline{M}(l) = \inf_{-\gamma v \le m} J(v) + \int_\Gamma l m(l)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma (m(l))^2\, d\Gamma =$$

$$= J(v(l)) + \int_\Gamma l m(l)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma (m(l))^2\, d\Gamma = K(v(l), l, m(l)).$$

Из (5) вытекает

$$\inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r}\int_\Gamma \left(\left((l - r\gamma v)^+ \right)^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\} = \inf_v \inf_m K(v, l, m) =$$

$$= \inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \inf_{-\gamma v \le m} \int_\Gamma \left((l + rm)^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\} = \inf_m \inf_v K(v, l, m) =$$

$$= K(v(l), l, m(l)) = J(v(l)) + \frac{1}{2r}\int_\Gamma \left((l + rm(l))^2 - l^2 \right) d\Gamma =$$

$$= J(v(l)) + \frac{1}{2r} \inf_{-\gamma v(l) \le m} \int_\Gamma \left((l + rm)^2 - l^2 \right) d\Gamma. \qquad (7)$$

Последнее равенство в (7) обосновывается рассуждением от противного. Пусть

$$J(v(l)) + \frac{1}{2r}\int_\Gamma \left((l + rm(l))^2 - l^2 \right) d\Gamma > J(v(l)) + \frac{1}{2r} \inf_{-\gamma v \le m} \int_\Gamma \left((l + rm)^2 - l^2 \right) d\Gamma,$$

$$\int_\Gamma \left((l + rm(l))^2 - l^2 \right) d\Gamma > \inf_{-\gamma v \le m} \int_\Gamma \left((l + rm)^2 - l^2 \right) d\Gamma.$$

Имеем

$$\inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \inf_{-\gamma v \le m} \int_\Gamma \left((l + rm)^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\} =$$

$$= J(v(l)) + \frac{1}{2r}\int_\Gamma \left((l + rm(l))^2 - l^2 \right) d\Gamma >$$

$$> J(v(l)) + \frac{1}{2r} \inf_{-\gamma v \le m} \int_\Gamma \left((l + rm)^2 - l^2 \right) d\Gamma \ge$$

$$\ge \inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \inf_{-\gamma v \le m} \int_\Gamma \left((l + rm)^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\}.$$

ВЕСТНИК ТОГУ. 2008. № 4 (11)

Полученное противоречие доказывает равенство (7). Оно означает, что задача (5) разрешима и ее решение есть $v(l)$.

Задачу

$$\begin{cases} \underline{M}(l) - \max, \\ l \in L_2(\Gamma) \end{cases} \tag{8}$$

назовем двойственной к задаче (1).

Введем функцию

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma)} M(v,l) \quad \forall v \in W_2^1(\Omega).$$

Предположим, что $-\gamma v \le 0$. Тогда $K(v,l,0) = J(v)$ для любых $l \in L_2(\Gamma)$ и поэтому

$$M(v,l) = \inf_{m \in L_2(\Gamma)} K(v,l,m) \le J(v) \quad \forall v \in K.$$

Следовательно,

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma)} M(v,l) \le J(v) \quad \forall v \in K. \tag{9}$$

Если $-\gamma v \le m$, то

$$K(v,0,m) = J(v) + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2 \, d\Gamma.$$

Поэтому для всех $v \in W_2^1(\Omega)$ справедливо

$$M(v,0) = \inf_{m \in L_2(\Gamma)} K(v,0,m) = \inf_{-\gamma v \le m} K(v,0,m) =$$

$$= \inf_{-\gamma v \le m} \left\{ J(v) + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2 \, d\Gamma \right\} = J(v) + \frac{r}{2} \inf_{-\gamma v \le m} \int_\Gamma m^2 \, d\Gamma \ge J(v).$$

Тогда

$$\overline{M}(v) = \sup_{l \in L_2(\Gamma)} M(v,l) \ge M(v,0) \ge J(v) \quad \forall v \in W_2^1(\Omega). \tag{10}$$

Из (9), (10) вытекает

$$\overline{M}(v) = J(v) \quad \forall v \in \mathrm{K}. \tag{11}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\overline{K}(v,l,m) = \begin{cases} J(v) + \int_\Gamma lm \, d\Gamma, & \text{если } -\gamma v \le m \text{ п.в. на } \Gamma, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для $l \in (L_2(\Gamma))^+$

$$\inf_{m \in L_2(\Gamma)} \overline{K}(v,l,m) = J(v) + \int_\Gamma lm \, d\Gamma = L(v,l).$$

Очевидно, что

$$K(v,l,m) \ge \overline{K}(v,l,m)$$

и поэтому для $l \in (L_2(\Gamma))^+$

$$M(v,l) \ge L(v,l).$$

Следовательно, $\overline{M}(v) \ge \overline{L}(v)$, где $\overline{L}(v) = \sup\limits_{l \in (L_2(\Gamma))^+} L(v,l)$.

Если $v \notin \mathrm{K}$, то

$$\overline{L}(v) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} L(v,l) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} \left\{ J(v) - \int_\Gamma l\,\gamma v\, d\Gamma \right\} = +\infty \qquad (12)$$

и тем самым $\overline{M}(v) = +\infty \quad \forall\, v \notin \mathrm{K}$.

Из (11), (12) теперь следует

$$\overline{M}(v) = \begin{cases} J(v), & \text{при } v \in \mathrm{K}, \\ +\infty & \text{при } v \in \mathrm{K}. \end{cases}$$

Поэтому исходную задачу (1) можно представить в виде

$$\begin{cases} \overline{M}(v) - \min, \\ v \in W_2^1(\Omega). \end{cases} \qquad (13)$$

Очевидно, что

$$\inf_{v \in W_2^1(\Omega)} \sup_{l \in L_2(\Gamma)} M(v,l) \ge \sup_{l \in L_2(\Gamma)} \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} M(v,l),$$

$$\inf_{v \in W_2^1(\Omega)} \overline{M}(v) \ge \sup_{l \in L_2(\Gamma)} \underline{M}(l). \qquad (14)$$

Из неравенства (14) вытекает, что если для некоторой пары $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ имеет место равенство $\overline{M}(v^*) = \underline{M}(l^*)$, то v^* и l^* есть решения задач (13) и (8) соответственно.

Нетрудно показать, что (v^*, l^*) является седловой точкой функционала $M(v,l)$ и, наоборот, всякая седловая точка функционала $M(v,l)$ соответствует решениям задач (13) и (8).

Для характеристики седловых точек молифицированного функционала Лагранжа важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы* $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ *была седловой точкой функционала* $M(v,l)$, *необходимо и достаточно, чтобы* v^* *было решением задачи (13) и для любых* $m \in L_2(\Gamma)$ *выполнялось неравенство*

$$\chi(m) + \int_\Gamma l^* m\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2\, d\Gamma \ge \chi(0).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ есть седловая точка функционала $M(v,l)$. Это означает, что

$$\sup_{l\in L_2(\Gamma)} M(v^*,l) = M(v^*,l^*) = \inf_{v\in W_2^1(\Omega)} M(v,l^*),$$

$$\overline{M}(v^*) = \underline{M}(l^*).$$

Отсюда и из (14) следует, что v^* есть решение задачи (13), а l^* есть решения задачи (8). Следовательно,

$$\underline{M}(l^*) = \overline{M}(v^*) = \inf_{v\in K} J(v) = \chi(0).$$

Это означает

$$\inf_{m\in L_2(\Gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_\Gamma l^* m\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma m^2\, d\Gamma \right\} = \chi(0),$$

т. е.
$$\chi(m) + \int_\Gamma l^* m\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma m^2\, d\Gamma \ge \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma).$$

Достаточность. Пусть v^* есть решение задачи (13) и

$$\chi(m) + \int_\Gamma l^* m\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma m^2\, d\Gamma \ge \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma).$$

Имеем

$$\underline{M}(l^*) = \inf_{m\in L_2(\Gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_\Gamma l^* m\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int_\Gamma m^2\, d\Gamma \right\} \ge \chi(0) = \overline{M}(v^*).$$

Так как (14) $\overline{M}(v) \ge \underline{M}(l) \quad \forall v \in W_2^1(\Omega)$, $l \in L_2(\Gamma)$, то $\overline{M}(v^*) = \underline{M}(l^*)$, и следовательно, v^* и l^* есть решения задач (13) и (8) соответственно.
Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $(v^*,l^*) \in W_2^1(\Omega)\times(L_2(\Gamma))^+$ *– седловая точка функционала Лагранжа* $L(v,l)$. *Тогда* (v^*,l^*) *является седловой точкой и для модифицированного функционала* $M(v,l)$.

Доказательство. Имеем

$$L(v^*,l) \le L(v^*,l^*) \le L(v,l^*) \quad v \in W_2^1(\Omega), l \in (L_2(\Gamma))^+.$$

Это означает, что

$$\sup_{l\in(L_2(\Gamma))^+} L(v^*,l) = L(v^*,l^*) = \inf_{v\in W_2^1(\Omega)} L(v,l^*), \quad \overline{L}(v^*) = L(v^*,l^*) = \underline{L}(l^*),$$

где, по определению,

$$\overline{L}(v) = \sup_{l\in(L_2(\Gamma))^+} L(v,l), \quad \underline{L}(l) = \inf_{v\in W_2^1(\Omega)} L(v,l).$$

Имеем

$$\overline{L}(v^*) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} \left\{ J(v^*) - \int_\Gamma l \gamma v^* \, d\Gamma \right\} = J(v^*) = \chi(0).$$

$$\chi(0) = \overline{L}(v^*) = \underline{L}(l^*) = \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} L(v, l^*) = \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} \inf_{m \in L_2(\Gamma)} {}^{-}K(v, l^*, m) =$$

$$= \inf_{m \in L_2(\Gamma)} \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} {}^{-}K(v, l^*, m) = \inf_{m - \gamma v \le m} \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} \left\{ J(v^*) + \int_\Gamma l^* m \, d\Gamma \right\} =$$

$$= \inf_{m \in L_2(\Gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_\Gamma l^* m \, d\Gamma \right\}.$$

Поэтому

$$\chi(m) + \int_\Gamma l^* m \, d\Gamma \ge \chi(0) \quad \forall m \in L_2(\Gamma).$$

Так как v^* есть решение задачи (13) и

$$\chi(m) + \int_\Gamma l^* m \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2 \, d\Gamma \ge \chi(m) + \int_\Gamma l^* m \, d\Gamma \ge \chi(0),$$

то из теоремы 1 следует, что (v^*, l^*) является седловой точкой для функционала $M(v, l)$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* (v^*, l^*) *– седловая точка функционала* $M(v, l)$. *Тогда* (v^*, l^*) *является седловой точкой функционала* $L(v, l)$.

Доказательство. Покажем, что $-l^* \in \partial\chi(0)$, где $\partial\chi(0)$ – субдифференциал функции $\chi(m)$ в точке $m = 0$. По определению субдифференциала это означает, что

$$\chi(m) - \chi(0) \ge -\int_\Gamma l^* m \, d\Gamma \quad m \in L_2(\Gamma), \quad \chi(\overline{m}) + \int_\Gamma l^* \overline{m} \, d\Gamma \ge \chi(0) \quad m \in L_2(\Gamma).$$

Пусть, напротив, $-l^* \in \partial\chi(0)$. Тогда найдется такой элемент $\overline{m} \in L_2(\Gamma)$, что

$$\chi(\overline{m}) + \int_\Gamma l^* \overline{m} \, d\Gamma < \chi(0). \tag{15}$$

Обозначим $\zeta = \chi(0) - \chi(\overline{m}) - \int_\Gamma l^* \overline{m} \, d\Gamma > 0$ и $m(\lambda) = \lambda \overline{m} + (1 - \lambda) \cdot 0$, $0 < \lambda < 0$. По теореме 1 имеем

$$\chi(m) + \int_\Gamma l^* m \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int_\Gamma m^2 \, d\Gamma \ge \chi(0) \quad m \in L_2(\Gamma).$$

Поэтому при $m = \lambda \overline{m}$ следует

$$\chi(0) \le \chi(m(\lambda)) + \lambda \int_\Gamma l^* \overline{m}\, d\Gamma + \frac{r\lambda^2}{2} \int_\Gamma \overline{m}^2\, d\Gamma \le$$

$$\le \lambda\chi(\overline{m}) + (1-\lambda)\chi(0) + \lambda \int_\Gamma l^* \overline{m}\, d\Gamma + \frac{r\lambda^2}{2} \int_\Gamma \overline{m}^2\, d\Gamma =$$

$$= \lambda\left(\chi(\overline{m}) - \chi(0) + \int_\Gamma l^* \overline{m}\, d\Gamma \right) + \chi(0) + \frac{r\lambda^2}{2} \int_\Gamma \overline{m}^2\, d\Gamma,$$

$$\chi(0) - \chi(\overline{m}) - \int_\Gamma l^* \overline{m}\, d\Gamma \le \frac{r\lambda}{2} \int_\Gamma \overline{m}^2\, d\Gamma.$$

Отсюда и из (15) вытекает, что

$$0 < \zeta \le \frac{r\lambda}{2} \int_\Gamma \overline{m}^2\, d\Gamma.$$

Устремляя λ к нулю, получим $0 < \zeta \le 0$. Противоречие показывает, что $-l^* \in \partial\chi(0)$, т. е.

$$\chi(m) + \int_\Gamma l^* m\, d\Gamma \ge \chi(0) \quad m \in L_2(\Gamma). \tag{16}$$

Отсюда следует, что

$$\int_\Gamma l^* m\, d\Gamma \ge \chi(0) - \chi(m) \quad m \ge 0.$$

Тем самым показано $l \in (L_2(\Gamma))^+$. Отсюда следует

$$\underline{L}(l^*) = \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} L(v, l^*) = \inf_{v \in W_2^1(\Omega)} \left\{ \chi(m) + \int_\Gamma l^* m\, d\Gamma \right\}.$$

Тогда из (16) имеем

$$\underline{L}(l^*) \ge \chi(0).$$

Далее, так как по теореме 1 элемент v^* есть решение задачи (13),

$$\overline{L}(v^*) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} L(v^*, l) = \sup_{l \in (L_2(\Gamma))^+} \left\{ J(v^*) - \int_\Gamma l\, \gamma v^*\, d\Gamma \right\} = J(v^*) = \chi(0).$$

Поэтому

$$\chi(0) = \overline{L}(v^*) \ge \underline{L}(l^*) \ge \chi(0),$$

т. е.
$$\overline{L}(v^*) = \underline{L}(l^*).$$

Следовательно, (v^*, l^*) есть седловая точка функционала $L(v,l)$.
Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает, что множество седловых точек функционала Лагранжа $L(v,l)$ совпадает со можеством седловых точек модифицированного функционала Лагранжа $M(v,l)$. Для поиска седловых точек модифицированного функционала $M(v,l)$ могут быть построены эффективные итерационные процессы (см., например, [4–6]).

Библиографические ссылки

1. *Решение* вариационных неравенств в механике / *И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек*. М., 1986.

2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в физике и механике. М., 1980.

3. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М., 1979.

4. *Ву Г., Намм Р. В., Сачков С. А.* Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 1.

5. *Вихтенко Э. М., Намм Р. В.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 9.

6. *Метод* итеративной проксимальной регуляризации для поиска седловой точки в полукоэрцитивной задаче Синьорини / *Г. Ву, С. Ким, Р. В. Намм, С. А. Сачков* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11.